

*The Dibner Library
of the History of
Science and Technology*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES





W. H. Ke. Angli
A. 1877.

VARIA OPERA
MATHEMATICA

D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

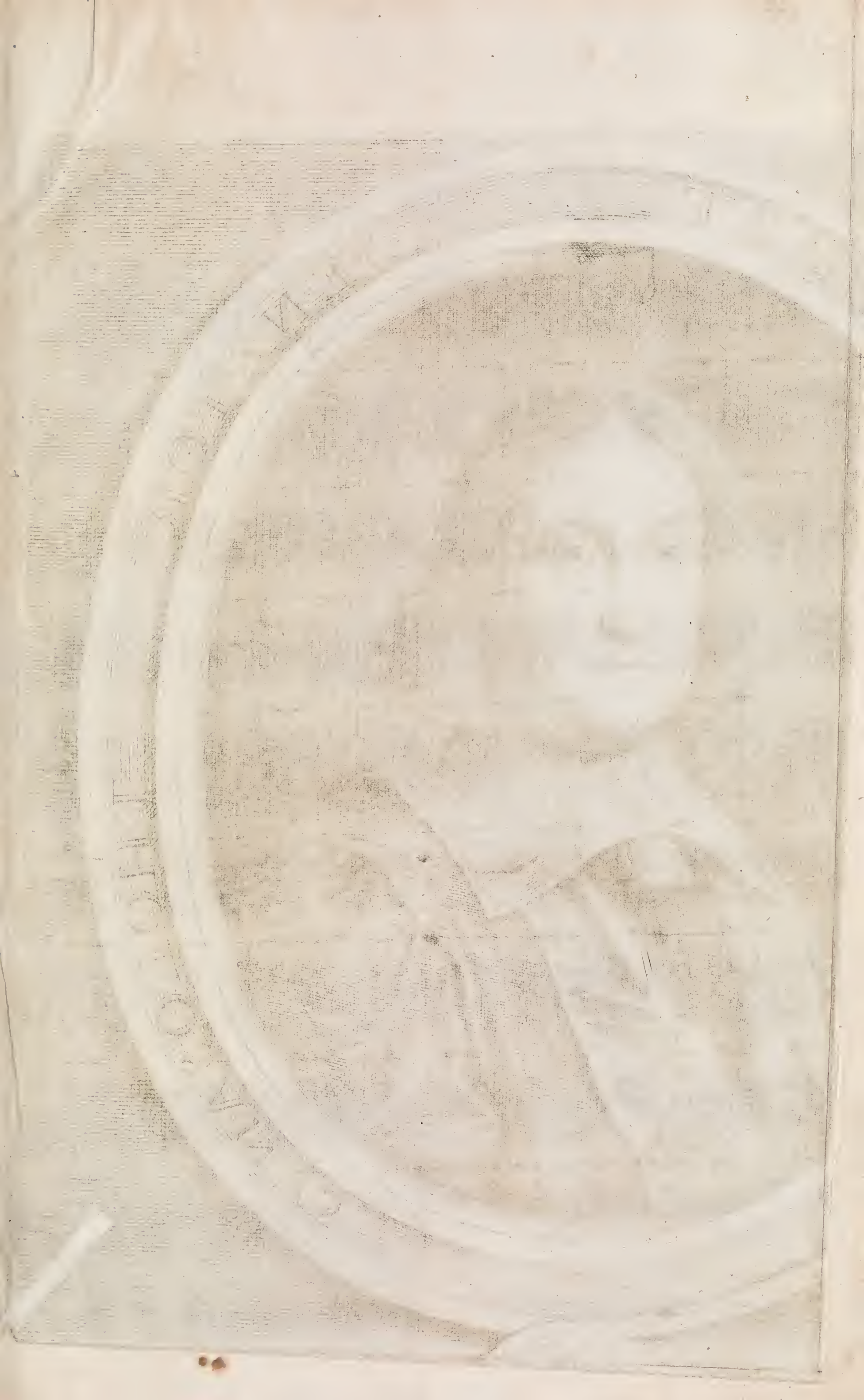
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel
ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè,
vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas,
aut Physicam pertinentibus scriptæ.



TOLOSÆ,

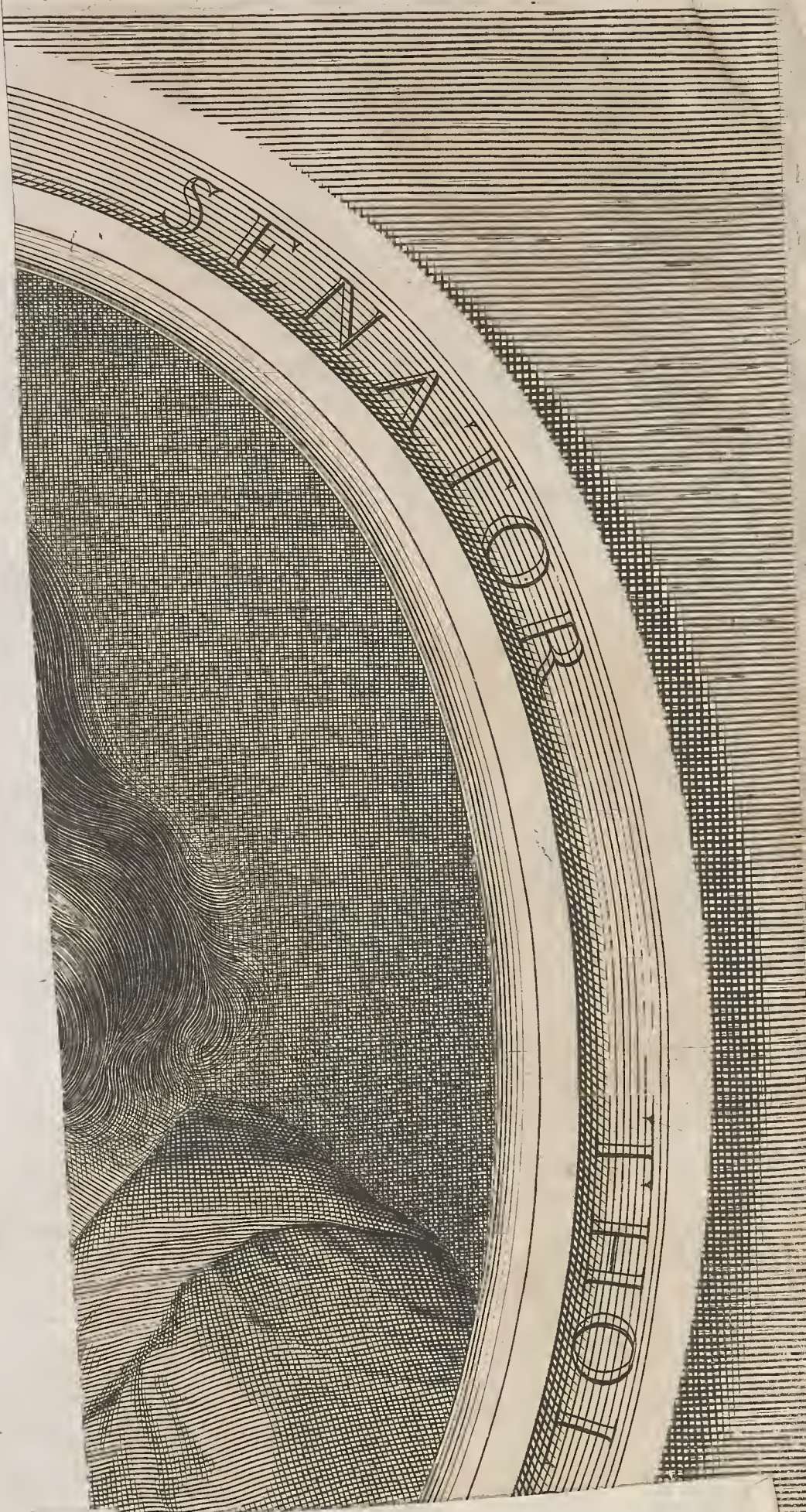
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta
Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

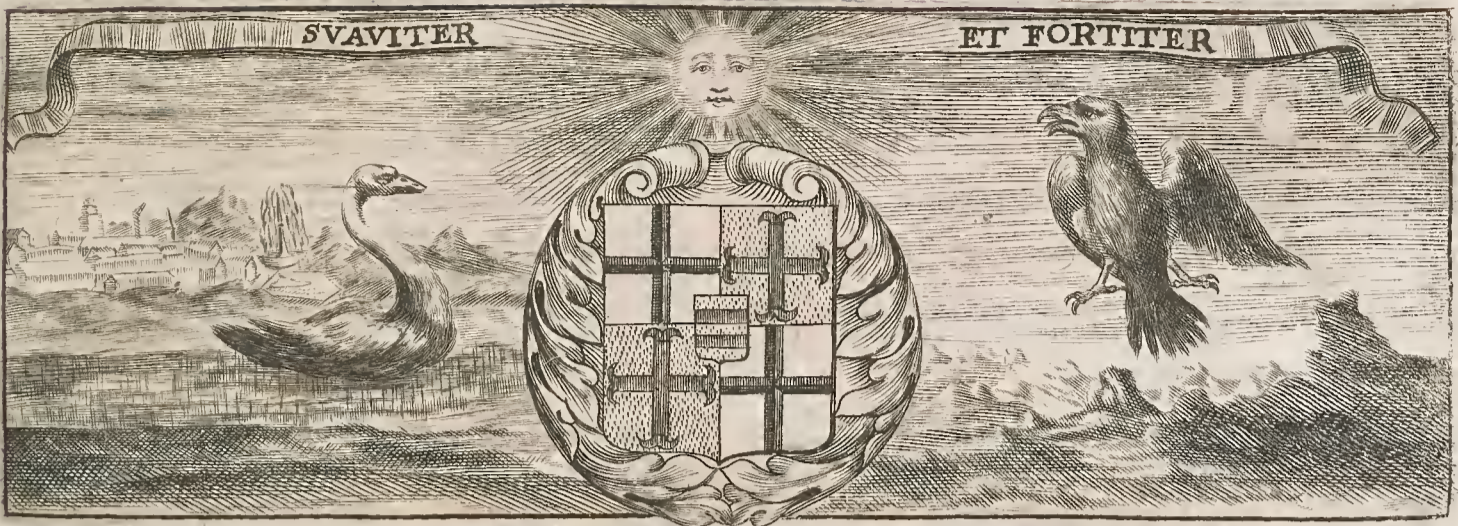




P. Bouilly, Sculptor



FOA
33
F33X
RE
MHT



CELSISSIMO
S. R. I. PRINCIPI
FERDINANDO
EPISCOPO PADERBORNENSI,
COADIUTORI MONASTERIENSI,
COMITI PYRMONTANO,
LIB. BARONI DE FURSTENBERG.

SAMVEL DE FERMAT S. P.



I munus quod tibi, Celsissime Princeps, offero non respuas, grati simul animi & obsequii quodam erga te, ac pietatis officio erga Parentem fungi videbor : dum in illius operum Mathematicorum limine nomen statuo, quod injurias temporum & invidia morsus arcere possit. Quis enim unquam credat improbari quod tu semel probaveris, quem Arctoi syderis instar intuentur quicumque scientiarum pelagus sulcare cupiunt, mox tutius & tranquillius futurum, cum fluctus omnino sedaverit lenior pacis aura quae tandem spirare coepit ? Sic autem per omnes orbis literarii partes lucem spargis, ut te cuncti suspiciant & neminem despicias ; ita multorum errorem Magnatum damnas qui veluti quodam summae dignitatis privilegio sibi concessum existimant, ut non tantum impune, verum etiam splendidè possint esse indocti ; & se contemnendos putent nisi Musas spernere audeant. Sed abundè tua probat auctoritas nulli magis utiles esse literas, quàm ei qui, ut decet, Pastor populorum esse velit, nulli plus gloriae asserre : quia raro conveniunt imperii comes sollicitudo, & aptus colendae menti secessus. Idem profectò centrum ferè nunquam habent civilium curarum & sublimium disciplinarum circuli : in tanto negotiorum cir-

cuitu rectà ad doctrinæ culmen ascendere non minùs forsan difficile Politico videretur, quàm Geometræ curvas rectis equare, cujus rei specimen exhibet hîc edita dissertatio. Superavit tamen omnes obices tua Celsitudo, tibi que fidum in mediis tempestatibus portum condere potuisti, & egregiis plerisque scriptoribus quos tuarum fama virtutum ad Paderæ fontes allicit, ubi venam quovis latice puriorem nanciscuntur, ubi te præeunte citiùs discunt quò properandum sit, quàm si studiis in umbra educatis anxie semotos calles investigarent. Longum scilicet iter est per præcepta, breve per exempla, brevissimum per exempla Principis viri, quem etiam a via peragrantes loca plurimi libenter sequi conantur; sed paucissimi sunt qui tuis inherere vestigiis queant; & dum optas

Voce ciere viros, Phœbumque accendere cantu,

Vocis tuæ suavitas tuis non mediocriter votis obstat. Deterret nimirum qui sic hortatur; silere docet, qui tam doctè loquitur. Id ego experior quoties opera tua per volo, quæ mihi licet ignoto & immerenti mittere voluisti: illa semper, adulationis expers, cujus causas procul habeo, mirari simul & laudare gaudeo quæ vix quisquam imitari posse confidat. Monumentis enim Paderbornensibus, quæ tam munificè restaurans tam eleganter celebras, monumentum longè perennius exegisti: si Quintilii Vari, cujus cladem cedro dignis carminibus memoras, Legiones Romæ reddi nequeunt, at saltem tui sermonis illecebris & venustate Vari vel Augusti seculum ei reddere videris, Virgiliumque simul & Horatium ac utriusque præsidium & decus referre. Augurabatur olim lepidus Vates non defuturos Marones, quandiu sint Mæcenates, sed quidquid præclarum in Mæcenate & Marone fuit, in eodem pectore reperiri posse nemo speraverat, si ve quòd nimia copia Poëtas inopes & steriles plerunque reddit (unde Theocritus * Diophanto fatetur artes excitari paupertate, quam laboris magistram vocat) si ve quòd alienis carminibus ei non opus est qui suis satis oblectari potest, ut adoptivos liberos querere non solet cui natura legitimam sobolem dedit. Verum in te, Celsissime Princeps, collecta non sine stupore cernimus, quæ divisa tam illustres alios effecerunt; & tua singularis humanitas, quæ tot eximias dotes connectens, cælestes gemmas auro inserere videtur, spondet à te benignè excipiendum, tuoque in sinu fovendum hunc ingenii paterni partum, qui suo defensore orbatus, ut posthumus, tuo patrocinio indiget, quod venerabundus exposco.

* Idyl.
16.



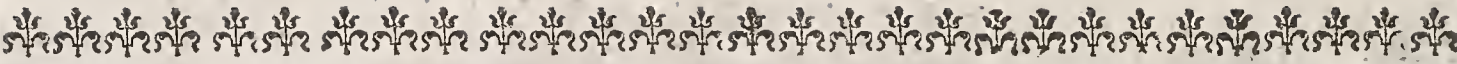
DE CELSISSIMO PRINCIPE
FERDINANDO FURSTENBERGIO,
Episcopo Paderbornensi, &c.

OB AUREVM NUMISMATA, IN QVO
illius imago conspicitur, missum.



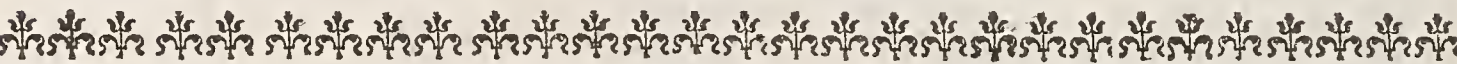
UREA Pierio quam culmine mittis imago
Quæ nostros ingressa lares fulgore replevit
Immeritamque manum, Phœbi ipsa referre videtur
Ora, solo qui cuncta fovet, nec florea tantum
Rura super lætus rutilat glebasque feraces,
Cernere sed sterilem non dedignatur arenam;
Sic hilares oculos simul & cum fronte serena
Innocuos mores insignis vultus adumbrat;
Sit tamen ars quamvis spectanda numismatis, illam
Effigiem superavit opus quodcunque Camænis
Sponte tuis fluxit dulci de fonte leporum:
Scilicet Aonij meliùs te vertice montis
Spirantem ostendunt Musæ, dum natus Olympo
Doctrinam pietate auges, castasque sorores
Ad superos tollens, dignoscis quam sit inane
Ornari ingenium, nimioque calefcere motu,
Si vacuum æthereo pectus non uritur igne.
Luminibus quantis & quot virtutibus omnes
SUA VITER * alliciens animos, validique catenis
Eloquij blandus victor trahis! his ego sensi
Me placidè captum jam pridem, nec tibi possim
Hoc magis addici, qui me devincit, honore.
At quas nunc grates referam? Te principe Vatum
Munera digna mihi Romanaque carmina defunt;
Carmina Mæcenas sed tu par ipse Maroni
Nostra nec expectas, nec vilia munera quæris.
Non eget exigua sublimis arundine laurus,
Et rauca non vocis eget tua fama susurro;
Sat nitidis Latio quibus aurea redditur ætas
Eximias scriptis potuisti pandere dotes,
Purior illimi ceu splendens flumine solus,
Ut decet, ipse suis radijs se pingit Apollo.

* Illustrissimi
Principis tes-
sera SUAVITER
& FORTITER.


DE PRINCIPIS EIVSDEM PRÆCLARO
Monumentorum Paderbornensium opere.

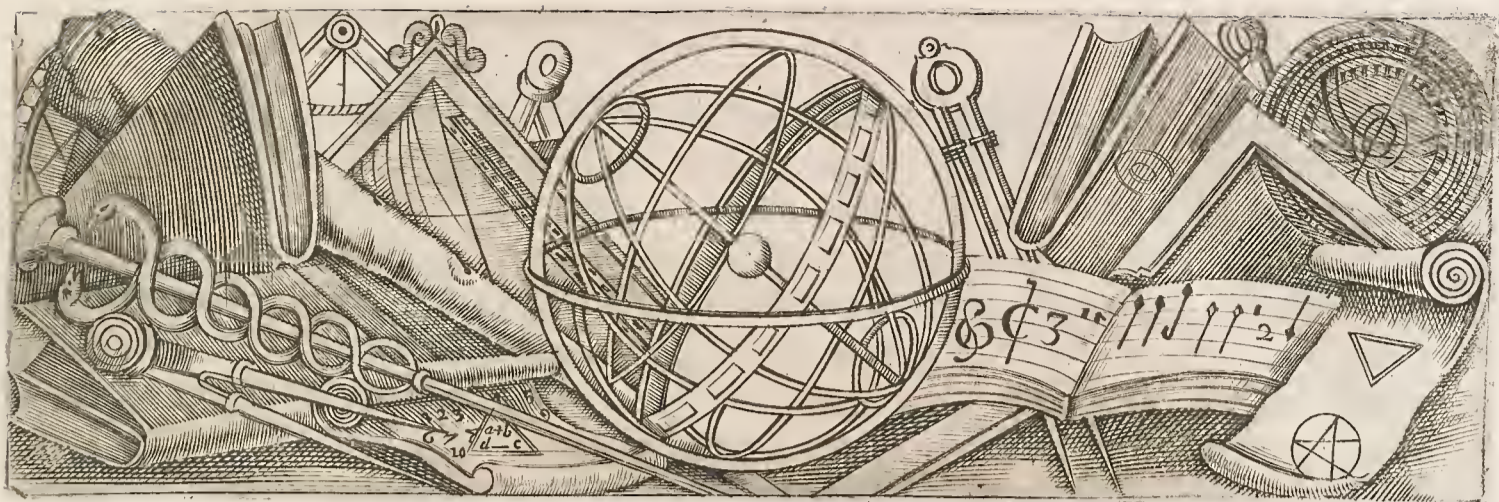
DUM Paderæ fontes æterno carmine Princeps
 Aonij celebrat spes columenque chori,
 Ut superat quæ sic ponit monumenta, suisque
 Altius ipse aliud tollit ad astra modis!
 Hujus Cana fides ornat pia pectora, mentem
 Lux Sophiæ, Latij priscus & ora lepor.
 Amissas * his olim Aquilas quæ flevit in arvis,
 Delicias illinc Roma decusque trahit.
 Fernandi eloquium Tiberis miratur, & ævi
 Immemor, Augusti sæcla redire putat.

* Natus est Il-
 lustris Princeps
 in ea Germa-
 niæ parte in
 qua cæsæ fue-
 runt Quintilii
 Vari Legiones.


DE EODEM PRINCIPE QUI MIRANDIS
ingenii doctrinæque dotibus stemmatis ac dignitatum splen-
dorem augens, pacem omnibus morum & facundiæ
suavitate persuadere possit.

O D E.

Nunc corda mulcens ò utinam Sacer
 Notos recursans per fluvios Olor
 Mox cogat infensos canorâ
 Voce potens lituos silere;
 Hic prima Pindi gloria cui favet
 Phoebus, nitentem Lilia quem tegunt,
 Quas ore non compescat iras
 Pieriâ modulatus arte?
 Ut cum querelis dulcisonis nemus
 Vox blanda latè lusciniæ replet,
 Discordis oblitæ susurri
 Mille solent volucres tacere;
 Non ille frustra sit patriæ datus
 A quo feroces flecti animi queunt;
 Martis nec incassum per arua
 Threicius cecinit Sacerdos:
 Orpheus parentem Calliopen colens
 Lenire plectro quot didicit feras!
 Sermone sic præstat domare
 Pectora, quam superare ferro.



ERUDITO LECTORI.

NON te latet, Erudite Lector, opera Mathematica præfatione vix indigere: nam ut Paralogismi culpam frustra longo sermone Geometra deprecari vellet, aut pro vera demonstratione falsam obtrudere; ita non opus est assensum solidæ rationis viribus debitum suppliciter efflagitare, quem adversarius videns sciensque, licet valdè reluctans, denegare non possit. Prætereà supervacaneum foret laudes Mathematicum fusè celebrare, cùm hanc spartam tot egregij scriptores adornandam jampridem susceperint. Quis enim nescit Geometriam & uberes illius fructus ad cœlum evehi à Platone, qui non solùm eam divinitus humanæ menti insitam, sed etiam ab ipso numine excoli putavit? nonne meritò Mathesis à Philone vocata fuit liberalium artium metropolis, quas, ubi desit illa, luminibus, & veluti manibus orbatas esse liquet? Unde à vero non aberrat qui ut manum instrumentum ante instrumenta, sic & Mathesin dici posse credit artem ante alias artes, cùm illius terrâ marique, & bello ut pace, tam evidens utilitas sit; quod unus instar omnium docuit olim Archimedes, dum infirmus corpore sed invictus ingenio senex, obsidionis Syracusanæ pars maxima, patriæ vis summa fuit, Briareus & Centimanus à Romanis appellatus: Quamobrem admiratione perculsum Marcellum licet hostem ab eo tot damnis affectum ei tamen inimicum esse noluisse Livius tradit, sed propinquis inquisitis honori præsidioque nomen, ac memoriam tanti viri fuisse. Mathematicas deinde disciplinas ansas Philosophiæ videri quis diffiteatur? cum Philosophus quamvis abundè Logicæ versutijs & argutijs instructus, si lux mathematica non affulgeat in Physica comparari possit Polyphemo in spelunca occæcato, & muneris, quo frui potuit, usum nescienti, vini scilicet, cui præclarus non ita pridem Philosophus Geometriam similem dici posse arbitratus est, quod recens inflat, vetus oblectat & vires auget. At non istorum operum Authorem inflavit unquam Mathesis, & tot demonstrationes, dum ab ipso non sunt editæ, quibuslibet argumentis meliùs demonstrant eum ab ostentatione laudisque cupidine alienum fuisse. Quòd autem de illarum sorte sollicitus non fuit, ferè semper autographa nullo servato responsorum exemplari mittere solitus, parum absuit quin hæc, quæ fortè non interitura credes, omninò extincta fuerint, antequam in publicam lucem prodirent. Hinc fit ut quia hæc sparsim disjecta colligere facile non fuit, fato posthuminum operum serò, pauciora, & minus culta typis edantur. Hinc etiam contingere poterit ut omnia quæ hîc occurrent tibi non videantur nova: sed quamvis alij de quibusdam rebus, quas hîc invenies, scripserint & lucubrations suas priùs vulgaverint, non idèò minùs hæc inventa istorum operum Authori debentur, qui adèò fastûs, & invidiæ expers fuit, ut aliena suis sat aliunde notis immiscuisse credi non possit, qui sua vix sibi tribuebat. Ab eo, exempli causâ, libri duo Apollonij Pergæi de locis planis procul dubio restituti sunt, licet Franciscus Schooten Academiæ Lugduno-Batavæ Professor illos à se restitutos asserat; nam sua typis mandavit Franciscus Schooten anno 1657. sed libros duos, qui hîc extant, Apollonij Pergæi de locis planis se vidisse Lutetiæ manuscriptos, nec non ad locos planos & solidos Isagogen,

testis omni exceptione major Herigonius asserit tomo 6. cursûs Mathematici editi anno 1634. Credere tamen, vt dixi, malim Batavum Professore eâdem de re scripsisse, quàm ab eo, vel à quovis alio aliquid perpetratum esse suspicari quod ingenuum animum dedecet, vel inverecundiam plagij probare possit. Verùm in istis, ni fallor, operibus, de quibus te non ex parva mole iudicaturum sât scio, occurret tibi non injucunda varietas, ut & in epistolis, quæ vel ab Authore, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris scriptæ fuerunt. Has inter sunt nonnullæ Pascalij in quibus ingenij non minùs terfi quàm perspicacis radios agnosces, quos ejusdem aliæ lucubrationes, & ipsæ satis exhibent Pascalij cogitationum reliquiæ: illud enim opus in quo *pendenti operi. interrupta*, multis eximium Matheseos circa res sacras specimen videtur, *æquataque machina cælo*. Quis autem ignorat qualis quantusque Geometra & quam insignis in Academia Parisiensi Professor fuerit Robervallius, cujus hîc aliquot epistolas legere poteris, & perlegisse gaudebis? Eduntur hîc quoque nonnullæ Gallicè vel Italicè scriptæ à Kenelmo Digbæo, qui præter generis nobilitatem & honores gestos, non solùm ingenio doctrinâque, sed etiam pietate conspicuus fuit, ac veræ Religionis cultu, quam ut gladio, sic & calamo tueri conatus est, ut fidem facit aureus illius liber de veritate Catholicæ Religionis Anglicè scriptus. Illis epistolis additur una aut altera Frenicli, cujus miram Arithmetica problemata solvendi facilitatem à multis prædicatam, & ejusdem responsis confirmatam Analytæ norunt. Quas verò non adjecimus circà Cartesianam Dioptricam epistolas legere poteris in tertio volumine epistolarum Cartesij cujus stupendæ sagacitatis circà Geometriam admiratione se captum fatetur is etiam qui nonnunquam ab eo dissentit. Ut autem in varijs istis operibus, sic & in epistolis multa reperies quæ ad Geometriam, vel Analyticen pertinent aut numerorum arcana, de quibus si plura videre cupias, habes observationes ad Diophantum, cujus opera typis mandari curavi anno 1670. & Doctrinæ Analyticæ inventum novum collectum è varijs epistolis D. Petri de Fermat ab insigni Geometra R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote. Est hîc prætereà nonnihil circa Mechanicam & Geostaticam, nec non Dioptricam ac Physicam, circà quàm v. g. non contemnendam fore confido epistolam de proportione quâ gravia decidentia accelerantur, ad Gassendum, quæ ipsi Gassendo viro exquisitæ eruditionis, & candore ac moribus qui Christianum Philosophum decent, prædito non displicuit, ut ejus responso, licet brevi, satis patet. Sic etiam celebris Itali Geometræ Abbatis Bened. Castelli epistola probat ei non displicuisse quæ hîc scripta sunt circà motum gravium aut centrum gravitatis. Cæterùm in his Parentis mei operibus & epistolis quæ multas disputationes circà quæstiones arduas continent, & quibus duas addidimus criticis observationibus non spernendis refertas, nullam vocem quæ sit acerbior, nullum pervicacis controversiæ vel amarulentæ contentionis occurrere vestigium, poteris observare. Id innatam mansuetudinem Authoris arguit, qui nullâ contradicendi libidine veritatem quærens, illam ab alijs inveniri gaudebat & gratulabatur: qui secùs agunt eam ut juvenes proci colere videntur, dum sibi dumtaxat affulgere vellent quod diligunt; sed qui veritatem divino, ut par est, amore prosequuntur, ipsam omnibus innotescere cupiunt, suamque felicitatem augeri putant, cum ejusdem plurimi fiunt participes. Epistolas verò ad Authorem scriptas, quæ hîc extant, ut nactus sum, edendas ingenuè existimavi, nullomodò minuere sed augere cupiens tantorum virorum famam, quorum alia responsa, nondum prælo commissa, si mihi suppeterent, ut harum disputationum seriem edere non pigeret. Ex istis autem operibus, Erudite Lector, fructûs, ni fallor, & voluptatis non parùm percipere poteris & si quid incuriâ Typographorum erratum sit, illud suppleas aut ignoscas quæso.

Schemata suis locis in toto opere, ut in illius parte, reperirentur, nisi defuisset sculptor ligni notis Geometricis incidendi peritus; sed figura quæ cum textu edita non fuerunt, ad libri calcem sunt rejecta, numeris paginarum, ad quas referantur, appositis, quod semel monuisse sufficiat.

* * * * *

ELOGE DE MONSIEUR DE FERMAT, Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Journal des Sçavans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy avec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit un des plus beaux esprits de ce siecle, & un genie si universel & d'une estenduë si vaste, que si tous les sçavans n'avoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses louanges.

Il avoit toujours entretenu une correspondance tres-particuliere avec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Hugens, &c. & avec la pluspart des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il avoit lié une amitié si étroite avec M. de Carcavi, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses études, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux écrits.

Mais parce que ce Journal est principalement pour faire connoître par leurs ouvrages les personnes qui se sont rendus celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des écrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire un éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la science des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy une methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Une autre *de maximis & minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans & solides; mais encore à l'invention des touchantes & des lignes courbes, des centres de gravité des solides, & aux questions numeriques.

Une introduction aux lieux, plans & solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans & solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Un traité *de contactibus sphericis*, où il a demonsté dans les solides ce que M. Viet Maître des Requestes, n'avoit demonsté que dans les plans,

Un autre traité dans lequel il rétablit & demonstre les deux livres d'Apollonius Pergaus, des lieux plans.

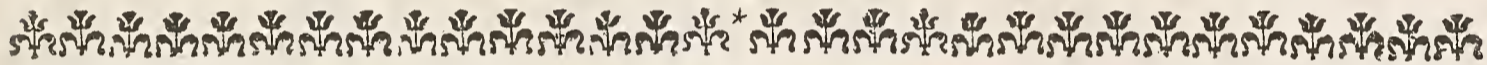
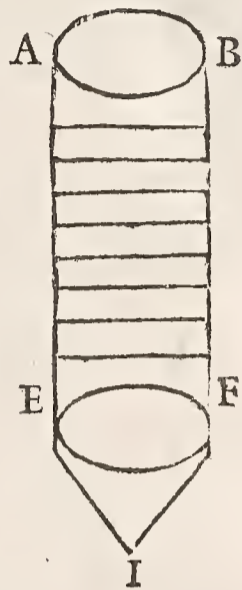
Et une methode generale pour la dimension des lignes courbes, &c.

De plus, comme il avoit une connoissance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoient; il a éclaircy une infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On a imprimé depuis peu quelques-unes de ses observations sur Athenée; & celui qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inseré dans son ouvrage une tres-belle sur une Epître de Synesius, qui estoit si difficile, que le Pere Petau qui a commenté cét auteur, a avoué qu'il ne l'avoit peu entendre. Il a encore fait beaucoup d'observations sur le Theon de Smyrne & sur d'autres Auteurs anciens. Mais la pluspart ne se trouveront qu'éparées dans ses Epîtres; parce qu'il n'écrivoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouvrages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empéchoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge avec beaucoup d'assiduité, & avec tant de siffisance, qu'il a passé pour un des plus grands Jurisconsultes de son temps.

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'avec toute la force d'esprit qui estoit ne-

chines; il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de la le traité des equiponderans d'Archimede a pour titre ἰσορροπιῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouvoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inventerent sur les principes du traité d'Archimede *de his qua vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui montre par la nature des eaux mêmes, la difference du poids qu'elles ont entr'elles, la figure en est telle; A F est un Cylindre de cuivre, A B est le bout d'en haut, qui est toujours ouvert, E F est le bout d'embas, qui est couvert du cone E I F, qui a la même base que le bout d'embas, A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diverses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empêchera; mais il y enfoncera jusques à une certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diversement, suivant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrier, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'usage de cét instrument, & la raison de cét usage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archevêque de Tolose, ayant envoyé cette explication au Pere Petau, il advoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui avoit compris quel estoit l'instrument, & il avoit écrit que dans une seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, j'ay crû que le Lecteur sçavant & curieux ne sera pas marry que je luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES,

A MONSIEUR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEUR,

Je n'ay pas eu moins de joye de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre vostre amitié, que si elle me venoit de la part d'une Maistresse, dont j'aurois passionnement desiré les bonnes graces. Et vos autres écrits qui ont précédé me font souvenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur, qui ne se fut auparavant éprouvé contr'elle au combat. Ce n'est pas toutefois que je pretende me comparer à ce Roger, qui estoit seul au monde capable de luy resister; mais tel que je suis, je vous assure que j'honore extremement vôtre merite. Et voyant la dernière façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est tres-bonne, & que si vous l'eussiez expliqué au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit, &c.



VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.



E locis quàm plurima scripsisse veteres, haud dubium. testis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analysi subijcimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

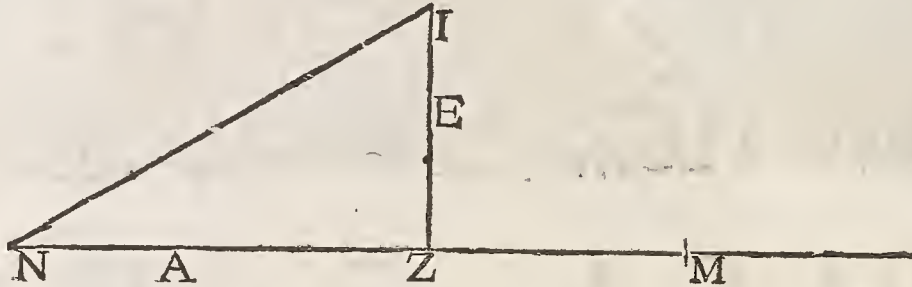
Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica & simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis describit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando describit parabolam, hyperbolem, vel ellipsim, fit locus solidus: si alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & solidorum investigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commodè autem possunt institui æquationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, & alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

Varia Opera.

Recta data positione sit $N Z M$. cujus punctum datum N . $N Z$. æquetur quantitati ignotæ A . & ad angulum datum $N Z I$. elevata recta $Z I$. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E . D in A æquetur B . in E . Punctum I . erit ad lineam rectam positione datam.



Erit enim ut B ad D . ita A . ad E . Ergo ratio A ad E . data est, & datur angulus ad Z . triangulum igitur $N I Z$. specie, & angulus $I N Z$. Datur autem punctum N . & recta $N Z$. positione. Ergo dabitur $N I$. positione, & est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis A & E admixta, vel in datas ductis, vel simpliciter sumptis.

$$ZP \text{ — } DA \div B \text{ in } E.$$

fiat D in R . æquale ZP

Erit ut B . ad D . ita $R - A$ ad E .

Fiat $M N$. æqualis R . dabitur punctum M . ideoque $M Z$. æquabitur $R - A$. dabitur ergo ratio $M Z$. ad $Z I$. sed angulus ad Z . datur: ergo triangulum $I Z M$. specie, & concludetur rectam $M I$. junctam dari positione: ideoque punctum I . erit ad rectam positione datam: idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab A . vel E .

Et est simplex hæc & prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam; verbi gratia 7. prop. lib. 1. Appollonii de locis planis, quæ generalius jam poterit enuntiari & construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam illius ope deteximus.

Si sint quotcumque lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis & datis efficietur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

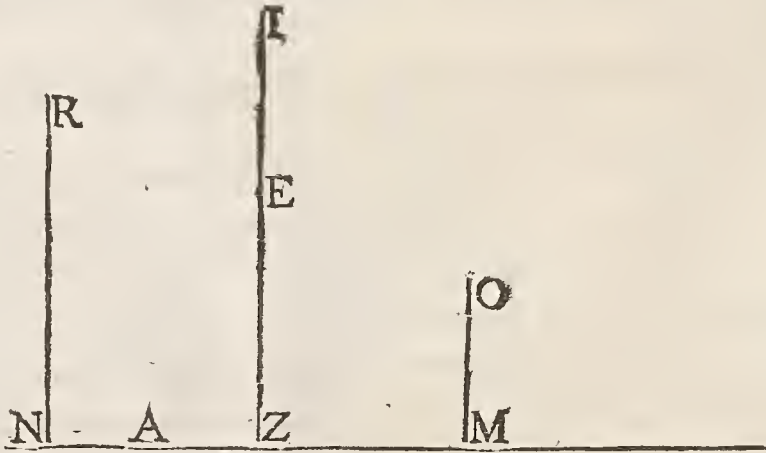
Infinitas omittimus, quæ Appollonianis meritò possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,

$$A \text{ in } E. \text{ æq. } Z. \text{ pl.}$$

$$AE \div Z^p$$

quo casu punctum I . est ad hyperbolem.



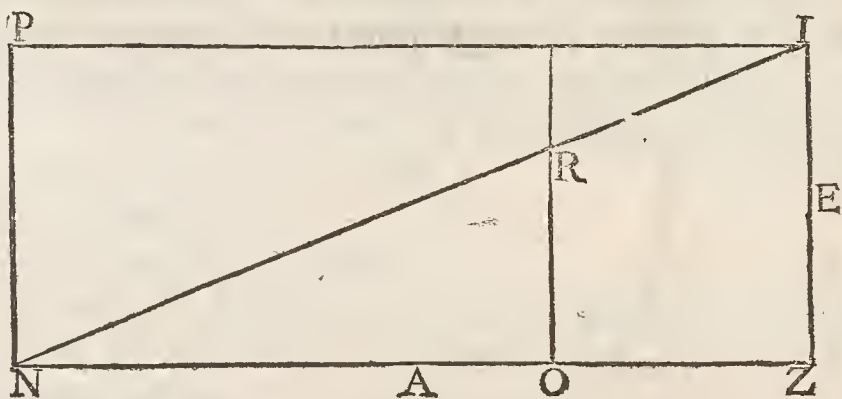
Fiat $N R$. parallela $Z I$. sumatur in $N Z$. quodvis punctum, ut M . à quo ducatur $M O$. parallela $Z I$. & fiat rectang. $N M O$. æquale Z pl. per punctum O . circa asymptotos $N R$. $N M$. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I . cum ponatur rectang. A . in E . sive $N Z I$. æquale $N M O$. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A . vel E aut A in E . affecta.

Varia Opera

Sit NZ , quad. $\rightarrow NZ$, in ZI , ad ZI , quad. in ratione data, ducatur quævis parallela OR , quadratum $NO \rightarrow NO$ in OR erit ad OR quadratum, in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I , erit ad rectam positione. Sumatur enim quodvis punctum, ut O , & fiat data ratio quadrati $NO \rightarrow NO$, in OR , ad OR , quadratum. Juncta NR . dabitur positione, & satisfaciet proposito; idemque continget in quibuslibet æquationibus, quarum omnia homogenea à potestatibus ignotarum, vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosius perquirere.

Si potestatibus ignotarum, vel rectangulis sub ipsis, admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadit constructio, singulos casus construimus breviter & demonstramus.

$A^2 \infty DE$. Si A^2 æq. D in E , punctum I , est ad Parabolam.



constituantur NZ , & ZI , ad quemcumque angulum Z .

Fiat NP , Parallela ZI , & circa diametrum NP describatur parabole, cujus rectum latus recta D , datæ, & applicatæ sint parallellæ NZ . punctum I . erit ad parabolam hanc positione datam. Ex constructione rectangulum sub D , in NP , æquabitur quadrato PI , hoc est, si PI , intelligatur esse A , & NP , intelligatur esse E , D , in E , æquabitur A^2 .

Ad hanc æquationem facillimè reducuntur omnes in quibus A^2 miscetur homogeneis sub datis in E , aut E^2 homogeneis sub datis in A , idemque continget, licet homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit E^2 æquale D in A .

$E^2 \infty DA$. In præcedenti figura vertice N , circa diametrum NZ , describatur parabole, cujus rectum latus sit D , & applicatæ rectæ NP , parallela, præstabit propositum, ut patet,

$B^2 - A^2 \infty DE$ Ponatur $B^2 - A^2$ æqu. D in E . Ergo $B^2 - D$ in E æquabitur A^2 .



Applicetur B^2 ad D , & sit æquale D . in R .

Ergo D in $R - D$ in E , æquabitur A^2 Ideoque D in $R - E$ æquabitur A^2 .

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem. Recta quippe $R - E$, succedet ipsi E .

Fiat quippe NM , parallela ZI , & æqualis R , & per punctum M ducatur MO , parallela NZ , datur punctum M , & recta MO , positione, in hac constructione OI , æquatur $R - E$. ergo D . in OI , æquabitur NE quad. sive MO quad. vertice M . circa diametrum MN , descripta parabole, cujus dextrum latus D , & applicatæ ipsi

Mathematica.

5

NZ, parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

Si $B^2 + A^2$ æqu. D in E.

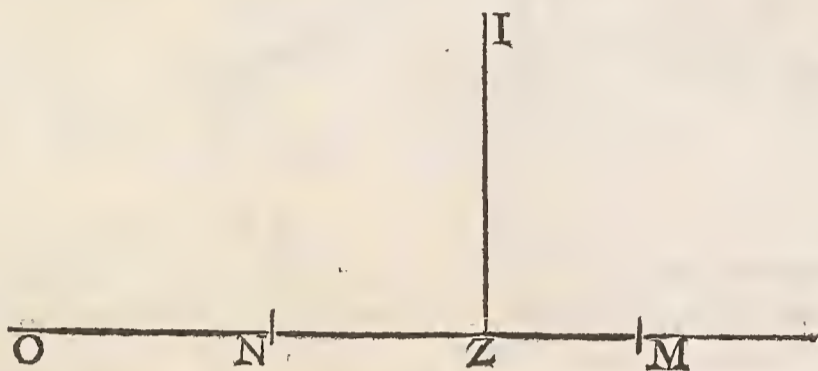
D in E — B^2 æquabitur A^2 &c. vt supr. similiter omnes æquationes affectæ constructuentur.

Sed A^2 miscetur sæpe E^2 & homogeneis omnino datis.

$B^2 - A^2$ æquetur E^2 .

Punctum I est ad circulum positione datum, quando angulus NZI. est rectus.

$$\frac{B^2 - A^2}{\infty E^2}$$



Fiat NM, æqualis B, circulus centro N. intervallo NM, descriptus præstabit propositum, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia ut I, quadratum ZI, æquabitur quadr. NM, sive B^2 quad. NZ, sive A^2 ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab A^2 & E^2 , & ab A, vel E, in datas ductis, modo angulus NZI, sit rectus, & præterea coefficientes A^2 æquentur coefficientibus E^2 .

Sit $B^2 - D$ in $A - A^2$, æquale $E^2 + R$ in E. Addatur utrimque R^2 , ut E, $B^2 - D A + R$, succedat E, fiet $R^2 + B^2 - D$ in $A - A^2$ æqu. $E^2 + R^2 + R$, in E. $-A^2 \infty E^2$.
 ipsi R^2 & B^2 , addatur D^2 , ut $D + A$ succedat ipsi A, & summa quadratorum $+ R E$.
 R^2, B^2 & D^2 æquetur P^2 .

Ergo auferendo scilicet D^2 , quod utrimque fuerat additum, $P^2 - D^2 - D$ in $A - A^2$.

Æquabitur $R^2 + B^2 - D$ in $A - A^2$.

Nam ex constructione $P^2 - D^2$ æquatur $R^2 + B^2$, si igitur loco ipsius A + D, sumpseris A, & loco $E + R$ sumpseris E.

Fiet $P^2 - A^2$: æq. E^2 .

Et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducentur & hac viâ omnes propositiones secundi libri Appollonii de locis planis construximus, & sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus; quod sanè mirabile est, & ab Appollonio fortasse ignorabatur.

Sed $B^2 - A^2$ ad E^2 , habeat rationem datam.

Punctum I. erit ad Ellipsim.

Fiat MN. æqualis B, & per verticem M. diametrum NM, centrum Z. describatur Ellipsis cujus applicatæ sint rectæ ZI, parallelæ, & quadrata.

$$\frac{B^2 - A^2}{E^2} \text{ ad rati.}$$

Applicatarum ad rectangulum subsegmentis diametri habeant rationem datam, punctum I, erit ad hujusmodi Ellipsim. Etenim quadratum NM — quad. NZ, æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducentur similes in quibus A^2 ex una parte opponetur E^2 sub contraria affectionis nota, & sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eadem, & angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus. Licet igitur coefficientes sint eadem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad Ellipsim.

Et licet commisceantur æquationibus homogenea sub datis & A vel E, fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

$N M$, bifariam secetur in Z , à puncto Z , excitetur perpend. $Z V$, & fiat datæ ratio eadem quæ $Z V$. quadruplæ ad $Z M$, descripto semicirculo $V O Z$, super $V Z$, applicetur $Z O$, æqualis ipsi $Z M$, & junctâ $V O$, centro V , intervallo $V O$, describatur circulus $O I R$, in quo sumatur quodlibet punctum, ut R , & jungantur rectæ $R N$, $R M$: aio quadrata $R N$, $R M$, ad triangulum $R N M$, esse in data ratione.

Hæc inventio si libros duos de locis planis à nobis dudum restirutos præcessisset, elegantiores sanè evasissent localium theorematum constructiones: nec tamen præcocis licèt & immaturi partûs nos adhuc pœnitet, & informes ingenii foetus posteris non invidere scientiæ ipsius quadamtenus interest, cujus opera primò rudia & simplicia novis inventis & roborantur & auferunt. Imò & studiosorum interest latentes ingenii progressus, & artem sese ipsam promoventem penitus habere perfectam.





A P P E N D I X

AD ISAGOGE M TOPICAM

Continens solutionem problematum
solidorum per locos.

PATUIT methodus qua lineæ locales deteguntur, inquirendum restat qua ratione problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantatum ignorantarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis.

Commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur: secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum, quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit.

Exemplis breviter & dilucidè res explicatur proponatur $A^3 + B$ in A^2 æquari Z^p in B .

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido B in A in E , ut per divisionem istius solidi, illinc per A , hinc per B , res deducatur ad locos. Cum igitur

$$A^3 + B \text{ in } A^2 \text{ æquetur } B \text{ in } A \text{ in } E.$$

$$\text{Ergo } A^2 + B \text{ in } A, \text{ æquabitur } B \text{ in } E.$$

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius E , ad parabolam positione datam.

Deinde cum Z^p in B , æquetur B in A , in E , ergo Z^p æquabitur A in E .

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius E , ad hyperbolem positione datam: sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam, Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab A affectis, ex alterâ solido omnino dato, vel etiam cum solidis ab A vel A^2 affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exempl. in æquationibus quad. quad.

$$A^4 + B^5 \text{ in } A + Z^p \text{ in } A^2 \text{ æquetur } D^{pp} \text{ Ergo } A^4 \text{ æquabitur } D^{pp} - B^5 \text{ in } A - Z^2 \text{ in } A^2, \text{ æquentur hæc duo homogenea } Z^2 \text{ in } E^2.$$

Cum igitur A^4 æquetur Z^2 in E^2 . Ergo per subdivisionem quadraticam.

A^2 æquabitur Z in E , & erit extremitas E , ad parabolam positione datam.

Deinde cum $D^{pp} - B^5$ in $A - Z^2$ in A^2 æquetur Z^2 in E^2 omnibus per Z^2 divis

$$D^{pp} - B^5 \text{ in } A - A^2. \text{ æquabitur } E^2.$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ Z^2$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E , ad circulum positione datum. Sed est

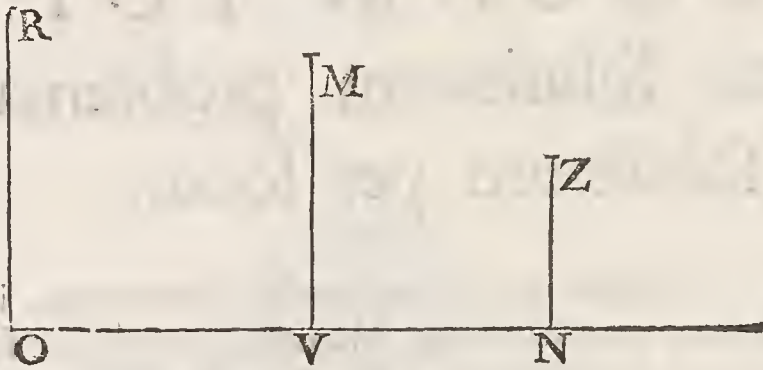
B

& ad parabolē positionē datam. Ergo datur. Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato quadraticæ: expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. i. de emend. ab affectiōe sub cubo, & quadrato quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis per parabolē, circulum, vel hyperbolē solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proport. sunt inveniendæ, fiet A^3 æqualis B^2 in D.

Si major mediarum ponatur A. Æquentur singula homogenea B in A in E. Illinc fiet A^2 æquale B in D.E, istinc A in E æquale B in D. Ideoque quæstio per hyperboles & paraboles sectionem perficietur.



Exponatur enim recta quævis positione data, OVN , in qua detur punctum O, sint rectæ datæ B & D, inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta OV æquari A, & recta VM ipsi OV ad rectos angulos æquari E, ex priori æqualitate quâ A^2 æq. B in E, constat per punctum O, tamquam verticem describendam parabolē, cujus rectum latus sit B, diameter ipsi VM , parallela & AO , applicatæ ipsi OV , transibit igitur hæc parabole per punctum M ex 2. æqualitate, qua B in D æquatur A in E, sumatur punctum ubilibet in rectâ OV , ut N, à quo excitetur perpendicularis NZ , & fiat rectang. OVZ , æquale rectangulo B in D, excitetur etiam perpendicularis OR , circa asymptotos RO , OV describenda hyperbole per punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M, sed parabole etiam quam supra descripsimus dabitur positione & per idem punctum M, transit, datur igitur punctum M, positione, à quo si demittatur perpendicularis MV , dabitur punctum V, & recta OV , major duarum continuè proportion. quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem paraboles & hyperboles.

Si ad quadrat. quad. lubeat quæstionem extendere omnia ducantur in A, A^4 æquab. B^2 . in D in A. æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum B^2 in E^2 .

Fient duæ æqualitates, nempe A^2 & B^2 in E, & D in A & E^2 .

Quæ singulæ dabunt parabolē positione datam, fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum paraboliarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimedem, & huic methodo facillimè redduntur obnoxia.

Abeant igitur illæ parapleroses Vietæ, quibus æquationes quadrato quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice planâ, pari enim elegantia, facilitate, & brevitate solvuntur, ut jam patuit, perinde quadrato quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor elegantius.

Ut pateat elegantia hujus methodi, En constructionem omnium problematum cubicorum, & quadrato quadraticorum per parabolē & circulum.

Ponatur $A^4 \rightarrow Z^2$ in A æquari D^2 .

Ergo A^4 æquabitur Z^5 in $A + D^{PP}$, fingatur quadratum abs $A^2 - B^2$ aut alio quovis quadrato, fiet quadratum $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 . Addatur ad supplementum singulis æqualitatis partibus $B^4 - 2B^2$ in A^2 fiet $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 , æquale $B^4 - B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in $A^2 - Z^5$ in $A + D^{PP}$ sit $2B^2 -$ æquale N^2 .

Et singulis homogeneis sive partibus æqualitatis æquetur N^2 in E^2 . Fiet illinc per subdivisionem quadraticam $A^2 - B^2$. æquale N in E , ideoque punctum extremum E , erit ad parabolam, ex nostra methodo, istinc fiet $B^4 - A^2 - Z^5$ in $A + D^{PP}$ æquale E^2 .

Ideoque ex nostra methodo punctum extremum E , erit ad circulum. Descriptione igitur paraboles & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato quad. extenditur. Curandum enim tantum ut ex una parte sit A^4 ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab A^3 . at per expurgationem Vietæam omnes æquationes quad. quadratæ ab affectione sub cubo liberantur, ergo eadem in omnibus methodus, cum autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in A , ductis, fiet æquatio quadrato quadrata cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo, ideoque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut A^2 ex unâ parte, ex altera E^2 sub contrariâ affectionis notâ reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, A^4 æquale Z^5 in $A^2 - Z^5$ in D . Fingatur quodvis quadratum abs A^2 - quovis quadrato dato, ut B^2 , fiet $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2 . adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum $B^4 - 2B^2$ in B^2 , fiet $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2 æquale $B^4 - 2B^2$ in $A^2 + Z^5$ in $A^2 - Z^5$ in D .

Ut igitur commoda fiat divisio, in 2. A æqualitate sumenda differentia inter $2B^2$, & Z^5 quæ sit $V G. N^2$, & utraque æqualitatis pars æquanda N^2 in E^2 .

Ut illinc fiat $A^2 - B^2$ æquale N in E . Istinc $B^4 - A^2 - Z^5$ in D æquale E^2 .

Advertendum deinde $2B^2$ debere præstare Z^5 alioquin A^2 non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolem, cui promptum remedium. B^2 enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus Z^5 nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali circulum creari semper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo $+$ in alterâ, aliud quadratum ignotum signo $-$.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit A^3 æqu. B^3 in D . Et A^4 æq. B^2 in D in A .

Adjiciatur utrimque $B^4 - 2B^2$ in A^2 . $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 æquabitur $B^4 + B^2$ in D in $A - 2A^2$ in B^2 sit $2B^2$, æquale N^2 .

Et singulæ æqualitatis partes æquentur N^2 in E^2 .

Fiet illinc $A^2 - B^2$ æquale N in E . Ideoque extremum E , erit ad parabolam.

Fiet istinc $B^2 \frac{1}{2} + D \frac{1}{2}$ in $A - A^2$ æquale E^2 .

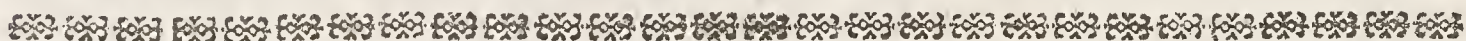
Ideoque extremum E erit ad circulum. Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire.



APOLLONII PERGÆI
LIBRI DUO
DE LOCIS PLANIS
RESTITUTI.



OCI plani quid sint notum est satis superque : hac de re scripsisse libros duos Appollonium testatur Pappus, eorumque propositiones singulas initio libri septimi tradit, verbis tamen aut obscuris, aut sanè interpreti minùs perspectis. (Græcum enim codicem videre non licuit) hanc scientiam totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam ab oblivione vindicamus, & Appollonium de locis planis differentem, Appolloniis Gallis, Batavis, & Illyricis audacter opponimus; certam gerentes fiduciam, non alibi præclariùs, quàm hoc in opere Geometriæ miracula elucere: quod ut statim fatearis, hîc exordior.



Propositiones libri primi hæ sunt.

PROPOSITIO I.

SI duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentés angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spatium: contingat autem terminus unius locum planum positione datum; & alterius terminus locum planum positione datum continget, interdùm quidem ejusdem generis, interdùm verò diversum, & interdùm similiter positum ad rectam lineam, interdùm contrario modo.

Hæc propositio in propositiones octo dividi commodè potest, & quævis ex iis in multiplices casus: obscuritatem interpreti præbuisse videtur interpunctionum defectus; imò & Pappus ipse hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacavisse obscuritate. Singula dum secamus in octantes, ita revelamus.

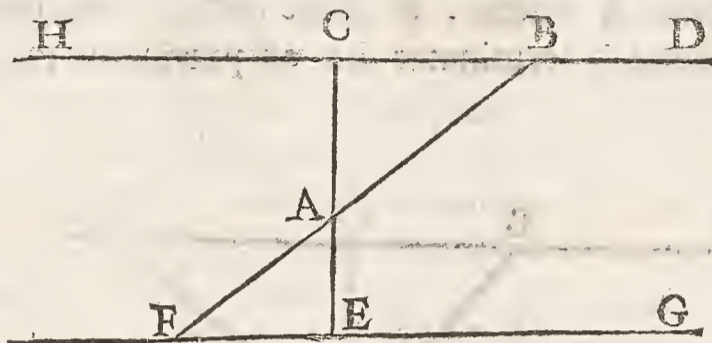
Mathematica.

B

PROPOSITIO I.

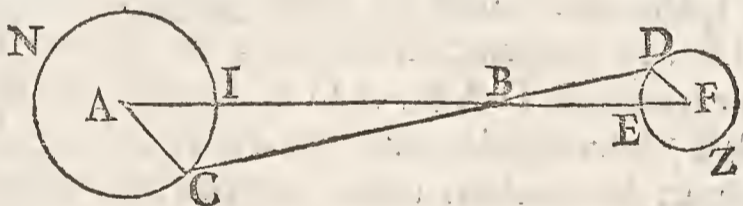
SI à dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur, datam habentes proportionem; & terminus unius contingat locum positione datum, hoc est, aut rectam, aut circumferentiam circuli positione datam; alterius terminus continget rectam, aut circuli circumferentiam positione datam.

Esto datum punctum, A. per quod agantur in directum rectæ, AB, AE, in proportione datâ, & sit verbi gratia punctum B, in rectâ linea HCB D; positione



datâ; aio punctum F, esse quoque ad rectam positione datam. à puncto A, demissâ in rectam HD, perpendiculari AC, dabitur punctum C, producat CA, ad E, & fiat ratio CA, ad AE, æqualis datæ, dabitur igitur recta AE, & punctum E. per punctum E, parallela rectæ HD, ducatur GEF, dabitur positione, & in ea erit punctum F, quia omnes rectæ per datum punctum parallelas secantes in eandem rationem dividuntur; patet ergò quamcunque rectam per punctum A, transcuntem, & datis positione parallelis terminatam in datam secari proportionem.

Esto deinde datum punctum B, & circulus positione ICN, cujus centrum A, jungatur BA, in puncto I, circumferentiam secans, & producat



IB, ad BE, ut sit ratio IB, ad BE, æqualis datæ, continuetur in F, & fiat AI, ad EF, ut IB, ad BE, & centro F intervallo FE, describatur circumferentia circuli EDZ, quam patet ex constructione positione dari, aio rectas omnes per punctum datum B transeuntes, & utrimque circumferentiis datorum positione circulorum terminatas in datam secari rationem.

Ducta enim verbi gratia CBD iungantur CA, DF, est ut IB, ad BE, ita AI, ad EF, ergò ut tota BA, ad BF, ita AI, sive AC, ad EF, sive FD, & sunt æquales anguli ABC, FBD, ad verticem; patet itaque triangula esse similia atque ideò, ut CB, ad BD, ita BA, ad BF, hoc est in ratione data, cum igitur à dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ BC, BD, verbi gratia in data ratione quarum BC, tangit circumferentiam positione datam tanget quoque BD, aliam circumferentiam positione datam.

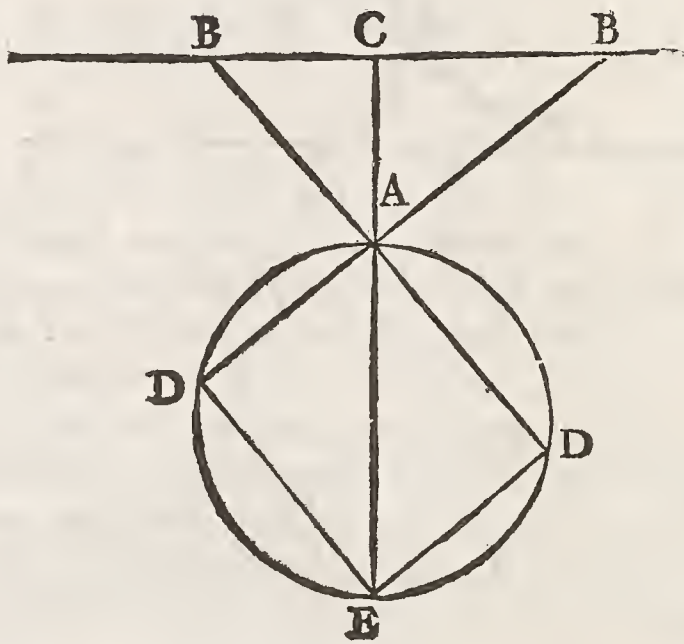
Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porrò nos minima quæque in demonstrationibus non docere, cum statim pateant, imò & casus diversos non persequi cum ex adductis minimo possint negotio derivari.

II. PROPOSITIO.

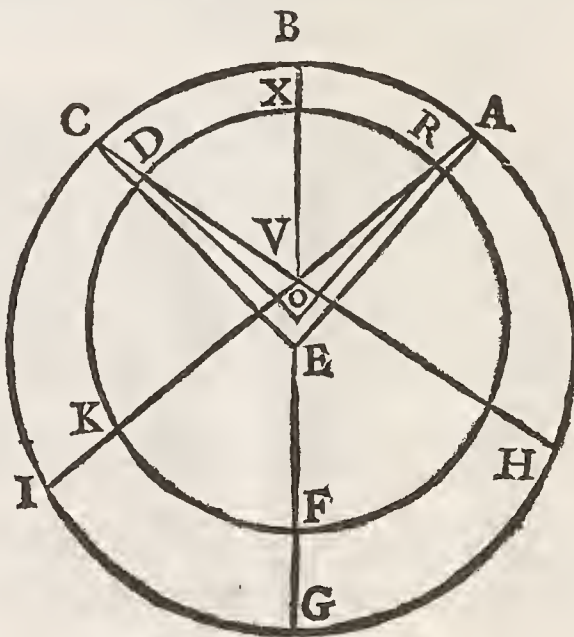
SI à dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione, tanget pariter & terminus alterius.

Esto datum punctum A , data primum recta BC , positione in quam demittatur perpendicularis, AC , dabitur ergo & punctum C , producat & fiat spatium dato æquale rectangulum CAE , super diametro AE , descripto circulo ADE , aio rectas omnes per punctum A ductas, & illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas ita ad punctum A , secari ut rectang.



sub partibus æquetur spatium dato, nam sit verbi gratia recta DAB , juncta DE , cum sit angulus ADE , in semicirculo rectus, & Anguli BAC , DAE , ad verticem æquales, erunt triangula DAE , ACB , similia, atque ideò rectangulum BAD , rectangulo CAE , dato æquale; cum igitur per punctum A , ducantur duæ rectæ AB , AD , in directum & terminus unius nempe AB , tangat rectam BC , positione datam, tanget & terminus alterius locum planum, hoc est circulum ADE , positione datum.

Sed detur punctum V , & circulus $BIGH$, positione ejus centrum E jungatur EV , & producat in B , dabitur VB , producat in F , ut sit rectangulum BVF ,

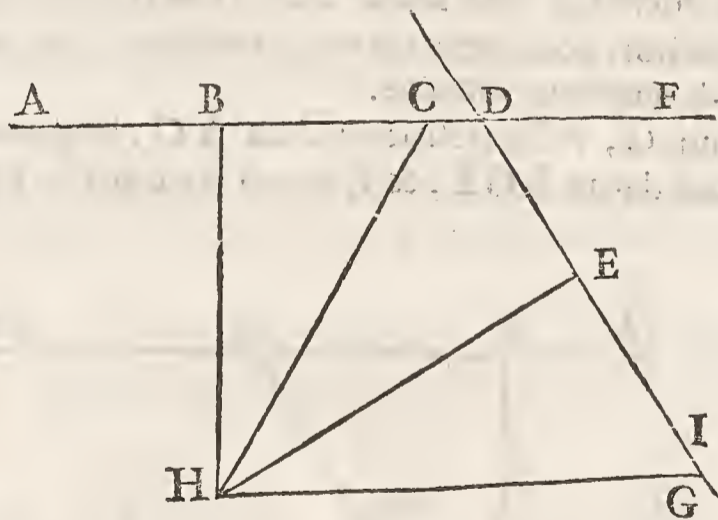


æquale dato cui etiam æquetur rectangulum $G V X$, super diametro X, F , circulus describatur $X K F$, quem quidem dari positione patet, Aio rectas per punctum V , transeuntes & duobus circulis, terminatas ita secari in V , ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant. Ducatur enim verbi gratia $A V, K I$, Aio rectangulum $A V K$, æquari dato, fumatur centrum circuli minoris O , recta autem $A V K I$, secet eundem circulum in R , jungantur rectæ $R O, A E$, posuimus rectangulum $G V X$, æquari $B V F$, erit ergò $G V$, ad $V B$, ut $F V$, ad $V X$, & componendo, & fumendo antecedentium dimidia, & per conversionem rationis, ut $E B$, five $E A$, ad $E V$, ita $O X$, five $O R$, ad $O V$, & habent duo triangula $O V R, V E A$, communem angulum $E V A$, erunt ergò similia & ut $A V$, ad $R V$, ita $A E$, ad $R O$, five $E B$, ad $O X$, $V E$, ad $V O$, cum ergò ut $E B$, ad $O X$, ita $V E$, ad $V O$, ergò ut $E B$, ad $O X$, ita reliqua $V B$, ad reliquam $V X$, atque ideò ut $A V$, ad $R V$, ita $B V$, ad $X V$, similiter probabimus ut $G V$, ad $V F$, ita $I V$, ad $K V$, erit igitur vicissim ut $G V$, ad $V I$, ita $F V$, ad $V K$, ut autem $F V$, ad $V K$, ita $V I$, ad $V X$, (quia rectangula $K V R, F V X$, in circulo sunt æqualia) & ut $V R$, ad $V X$, ita probavimus esse $V A$, ad $V B$, erit igitur ut $F V$, ad $V K$, ex una parte, ita $V A$, ad $V B$, rectangulum igitur $K V A$, rectangulo $F V B$, dato æquale, ex alia verò parte erit ut $G V$, ad $I V$, ita $V R$, ad $V X$, atque ideo rectangulum $I V R$, rectangulo $G V X$, dato æquale; cum igitur per punctum V , ducantur duæ lineæ in directum $A V$, & $V K$, comprehendentes spatium datum, & terminus unius nempe $V A$, contingat circulum positione datum, tanget & terminus alterius locum planum hoc est circulum $X K F$, positione datum.

III. PROPOSITIO.

SI à dato ducantur duæ lineæ datum continentis angulum, & datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione, continget & terminus alterius.

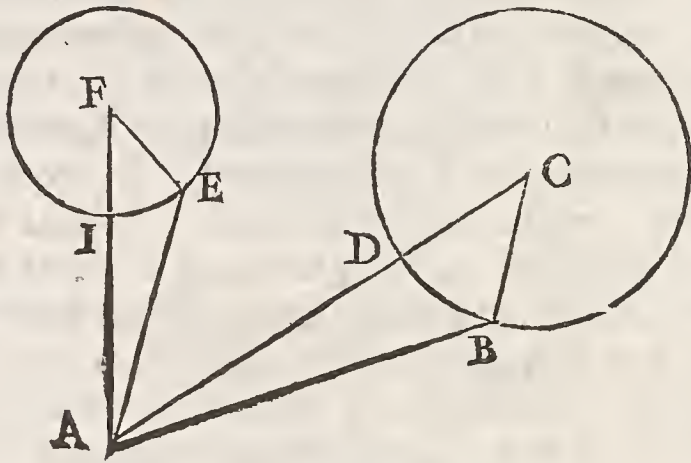
Esto primò datum punctum H , & recta linea $A F$, positione, inquam demissa perpendicularis $H B$, dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus $B H E$, & sit $B H$, ad



$H E$, in ratione data dabitur recta $H E$, positione & punctum E . à puncto E , ad rectam $H E$, excitata perpendicularis infinita $D E G$, dabitur positione, fumatur quodlibet punctum in recta $A F$, ut C , & juncta $H C$, fiat angulo dato æqualis $C H I$, aio rectam $H C$, ad $H I$, esse in ratione data, nam cum sint æquales anguli $B H E, C H I$, dempto communi $C H E$, erunt æquales $B H C, E H I$, & sunt anguli ad B , & E , recti, sunt igitur similia triangula $H B C, H E I$, & ut $H B$, ad $H C$, ita $H E$, ad $H I$, & vicissim ut $H B$, ad $H E$, ita $H C$, ad $H I$,

habet rationem datam. Cum igitur à dato puncto H , ductæ fuerint duæ lineæ HC , HL , in dato angulo CHI , & in data ratione, & altera nempe HC , ad punctum C , contingat rectam positione continget & terminus alterius locum planum, nempe rectam DG , quam dari positione probatum est.

Sed tangatur circulus, esto punctum A , datus circulus positione IE , cujus centrum F , jungatur FA , secans circulum in I , & fiat angulus æqualis dato, & ratio IA ,

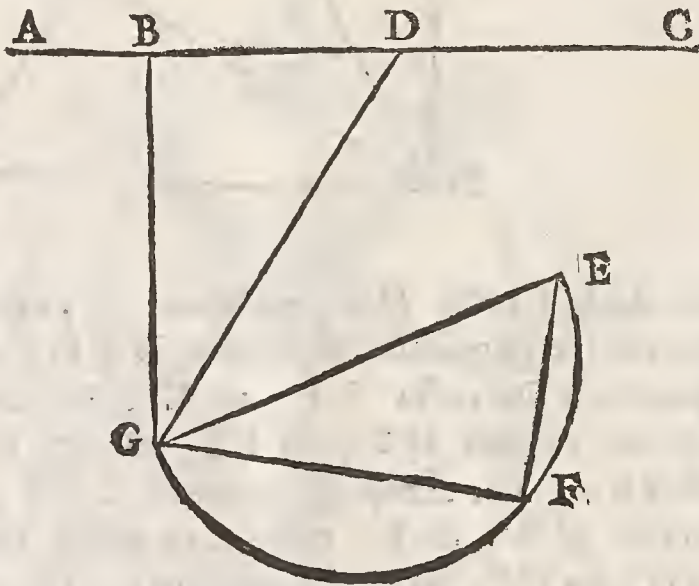


AD , data, dabitur AD , positione & punctum D , producat, & fiat ut IA , ad AD : ita IF : ad DC , centro C , descripto circulo DB , quem patet dari positione sumatur quodvis punctum in priore circulo ut, E , & iuncta EA , fiat angulo dato æqualis EAB , & sit punctum B in secundo circulo, aio esse AE ad BA in ratione datâ jungantur FE , BC , probabimus ut supra æquales angulos FAE , CAB , & similitudinem triangulorum FAE , CAB , iisdem rationibus quibus jam in priore propositione, ejusque 2. figura usi sumus, arguemus, eritque AF , ad EA , ut AC , ad AB , & vicissim ut AF , ad AC , hoc est ut AI , ad AD , ita AE , ad AB , dabitur ergo ratio AE ad AB , & patet tum sensus, tam consequentia propositionis.

IV. PROPOSITIO:

SI à dato puncto ducantur duæ lineæ datum continentem angulum & datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget, & terminus alterius.

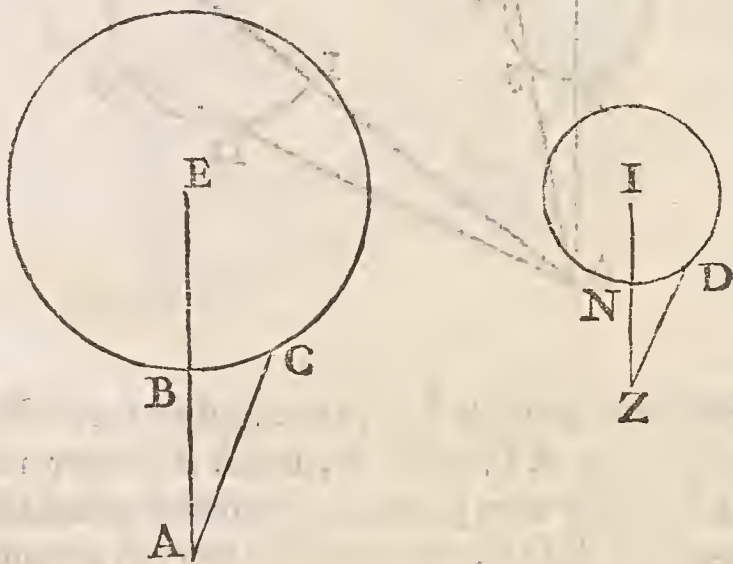
Sit datum punctum G , recta positione data AC , inquam ducatur perpendicularis GB , esto angulus datus BGE , & spatium datum sub BG , in GE , super GE ,



describatur

punctum E, per quod ductâ EFG, perpendiculari ad HE, & rectæ positione datæ parallela; aio omnes parallelas à punctis AH, ductas, & rectis CD, FG, positione datis terminatas, esse in proportione data AB, ad HE; erunt enim anguli BAD, EHG, æquales, & recti ad B, & E, similes ergo trianguli BAD, EHG, & reliqua facilia. Cum igitur à datis duobus punctis A, & H, ductæ fuerint parallelæ AD, HG, in ratione data, quarum AD, est ad datam rectam positione erit & HG, ad rectam positione datam, ideoque ad locum planum.

In hac figura sint data puncta A, & Z, & circulus positione BC, cujus centrum E, jungatur AE, occurrente circulo in B, & huic parallela ducatur ZN, fiatque ratio

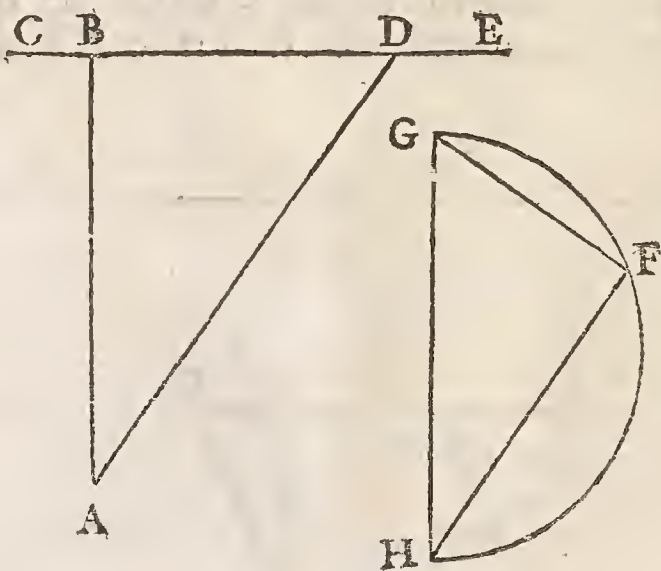


AB, ad ZN, æqualis datæ producat ZN, in I, & fiat ratio BE, ad NI, æqualis etiam datæ, centro I, intervallo IN, descriptus circulus dabitur positione, & quaestioni satisfaciet, nam ductis parallelis AC, ZD, circulis ad puncta C, D, occurrentibus erit ratio AC, ad ZD, æqualis datæ, esse enim angulos BAC, NZD, æquales, jam primus hujus propositionis casus evicit, reliquum præstabit secundum propositionis epitagma.

PROPOSITIO VI.

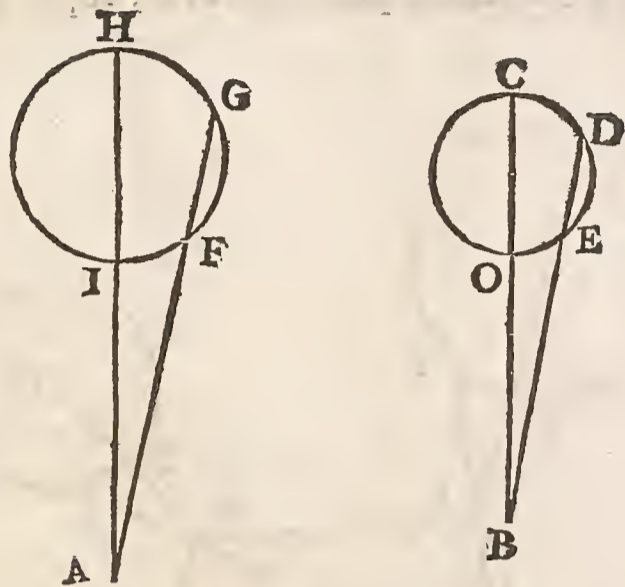
SI à duobus punctis datis duæ parallelæ agantur datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & H, recta positione CE, in quam perpendicularis AB,



cui parallela ducatur HG , & rectangulo dato sit æquale rectangulum sub AB, HG , dabitur recta HG , super qua descriptus semicirculus HFG , quæstionem perficiet, ductis enim ubicumque parallelis AD, HF , & juncta GF , patebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum BAD, GHF , similitudo, ideoque rectangulum sub AD , in HF , æquale dato sub BA , in HG , concludetur; cum igitur à duobus punctis, &c.

In 2. casu sint data puncta A & B , & circulus positione $IFGH$, per cuius centrum transeat AIH , cui parallela ducatur BC , & sit rectangulum sub AI, BC , æquale

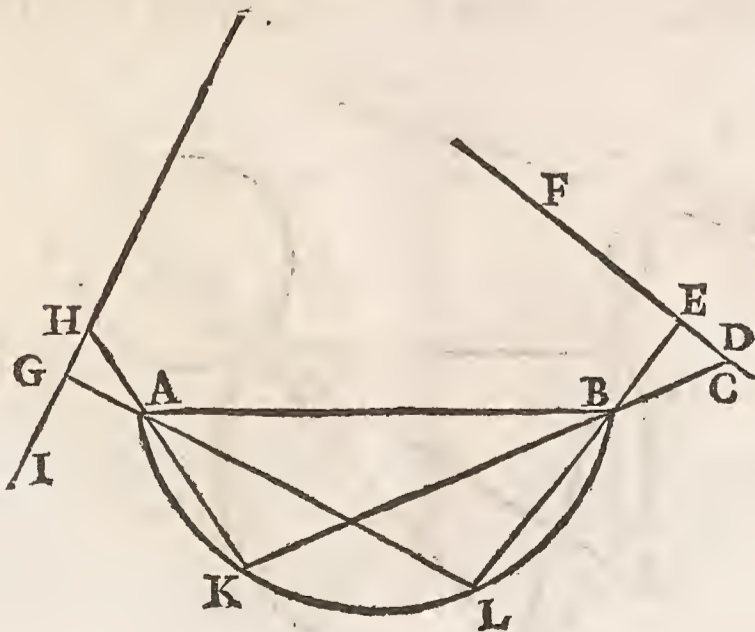


dato, eidemque æquale rectangulum sub AH , in BO , super recta OC , descriptus semicirculus præstat propositum, nam ductis parallelis AFG, BED , erunt anguli HAG, CBD , æquales & rectangulum sub AG , in BE , æquale dato eidemque rectangulum sub AF , in BD , nec, absimilis est ei, quæ in 2. epitagmate propositionis quartæ prodita est demonstratio.

VII. PROPOSITIO.

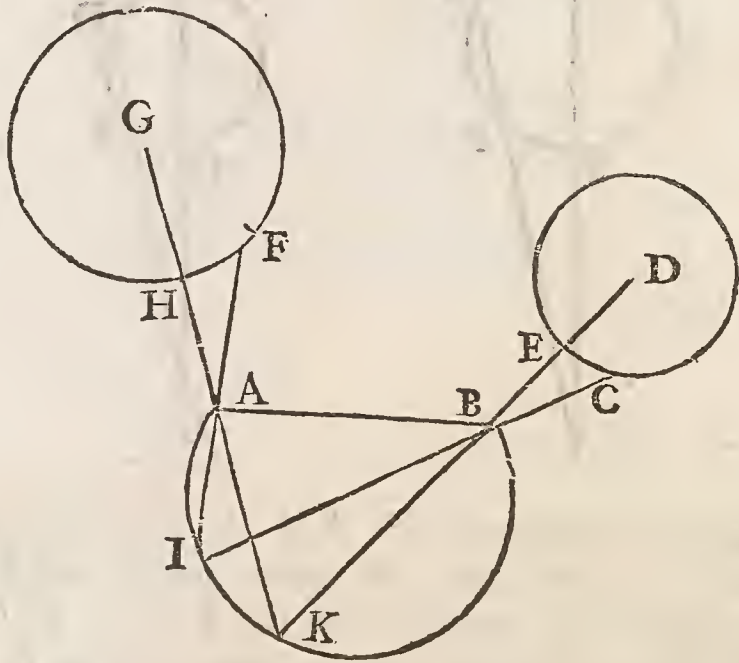
SI duæ lineæ agantur à datis duobus punctis datum continentibus Angulum & datam habentes proportionem contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget, & terminus alterius.

Sunto duo puncta A , & B , recta positione IGH , super BA , describatur portio circuli ALB , capiens angulum æqualem dato à puncto A , ducatur in rectam IH , perpendicularis AG ; quâ productâ donec circumferentiæ occurrat in L , producat LBE , & fiat AG , ad BE , in ratione data perpendicularis ad BE , agatur FE, DC , & sumatur quodlibet punctum in portionis circumferentiâ ut K , à quo ducantur per puncta A & B , rectæ KAH, KBD , occurrentes rectis IH, FC , in punctis H & D ;



aitio AH , ad BD , esse in ratione data AG , ad BE , cum enim hoc ita se habeat erunt triangula AGH , BED , similia, ideoque anguli GAH , EBD , eisque ad verticem KAL , KBL , æquales, quod quidem ita se habet cum eidem circuli portioni insistant, & proclivis est ab analysi ad synthese[m] regressus. Cum igitur à datis duobus punctis A , & B , ductæ fuerint duæ rectæ AH , BD , datum continentem angulum HKD , & terminus ipsius AH , contingat rectam IH , positione datam, continget & terminus BD , rectam FC , quam dari positione evicit constructio.

Sed sint data puncta AB , circulus positione HF , super recta AB , describatur portio.

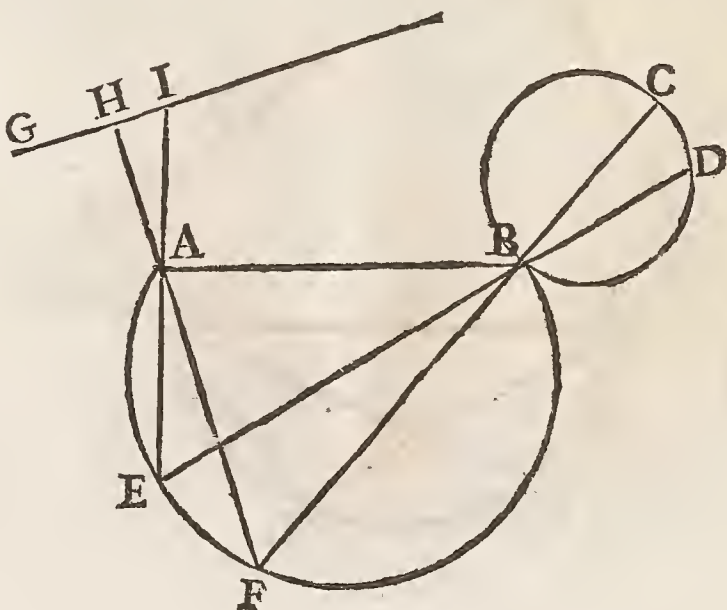


circuli AKB , capiens angulum dato æqualem, centrum circuli HF , esto G , jungatur AG , producat[ur] donec portioni occurrat in K , & ducatur K, B, E , & sit ratio AH , ad BE , data producat[ur] BE , in D , donec HG ad DE , sit pariter in ratione data, centro D , descriptus circulus dabitur positione, & dabit solutionem quæstionis: ductis quippe IAF , IBC , erunt anguli ad A , & B , æquales, & reliquum propositi non est laboriosum; statimque patet AF , ad BC , esse in ratione datâ, imò & ad circumferentias concavas productas idem præstare: cum igitur, &c.

VIII. PROPOSITIO.

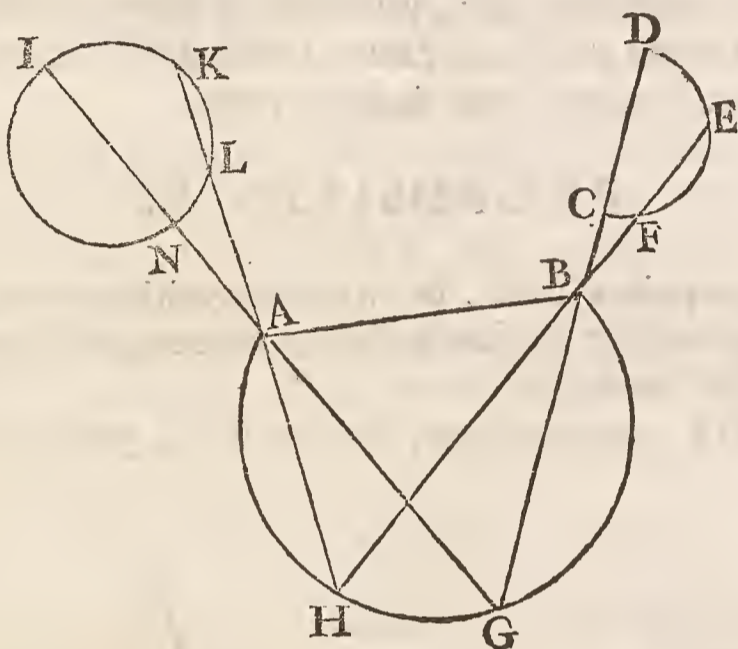
SI à duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentem angulum, & datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A , & B , recta positione GI , super AB , describatur portio circuli capiens angulum datum, ductæ perpendicularis AH , in GI , continuetur in F ,



& juncta FB, producat in C, sitque spatium datum AH, in BC, super recta BC, descriptus circulus faciet quod proponitur, erit quippe sumpto quovis puncto in portione, E, & junctis EAI, EBD, rectangulum sub AI, BD, æquale dato nec differt ab expositis aliis casibus demonstratis.

Sed sint data duo puncta A & B, datus positione circulus IKL, & super AB, descripta portio circuli capiens angulum dato æqualem: ducatur per centrum recta ANI, & producat in G, junctaque GB, producat & fiat rectangulum sub AI, in BC, æquale dato eidemque æquale rectangulum sub AN, in BD, super CD, descriptus semicirculus satisfacet proposito.



Hoc est sumpto quolibet puncto in H, & reliquis ut supra constructis, ut in figura, erit rectangulum sub AK, in BF, æquale dato, eidemque rectangulum sub AL, in BE, nec est diversa demonstratio à precedentibus constat itaque propositum.

Eaque ratione prior Appollonii seu Pappi propositio redditur manifesta.

Observandum autem casus quos in semicirculis tantum expressimus in circulis integris locum habere; sed & casus multiplices ex variâ datorum positione oriri, quos otiosiores ex præcedentibus facili operâ & proclivi ratiocinio deducunt.

Subjicit Pappus locum planum quem 2^2 . ex rectis contingit interdum esse ejusdem generis; interdum verò diversum. Hoc patet quia in 1. propositione verbi gratiâ est ejusdem generis, nam si prior sit ad rectam, est quoque ad rectam posterior, si ad circulum similiter ad circulum, in secundæ verò priore parte, & aliis quibusdam casibus est diversi generis.

Addit deinde aliquando similiter poni ad rectam lineam, interdum contrario modo: quo loco verba (ad rectam lineam) quæ nullum sensum admittunt, cenfeo delenda, & ita locum interpretor, ut aliquando secundus locus priori contrario modo ponatur, verbi gratiâ, si prior sit ad convexum circuli, secundus ad concavum, &c. cujus rei exempla priores propositiones suppeditabunt.

PROPOSITIO II.

SI rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, & alter circumferentiam concavam positione datam continget.

Hæc verba si ita legantur falsa est propositio, reponendum igitur loco, verbi gratiâ (positione datæ) magnitudine datæ; eritque sensus: ut datâ circuli diametro & centro, extremitas diametri sit ad circulum positione datum cujus rei veritas cum per se pateat cur diutius hîc immoremur.

PROPOSITIO. III.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum continentes, commune ipsorum punctum continget circumferentiam concavam positione datam.

Hæc propositio per se patet, dari enim super rectâ lineâ duo puncta jungente portionem circuli capientem angulum datum docuit Euclides in elementis.

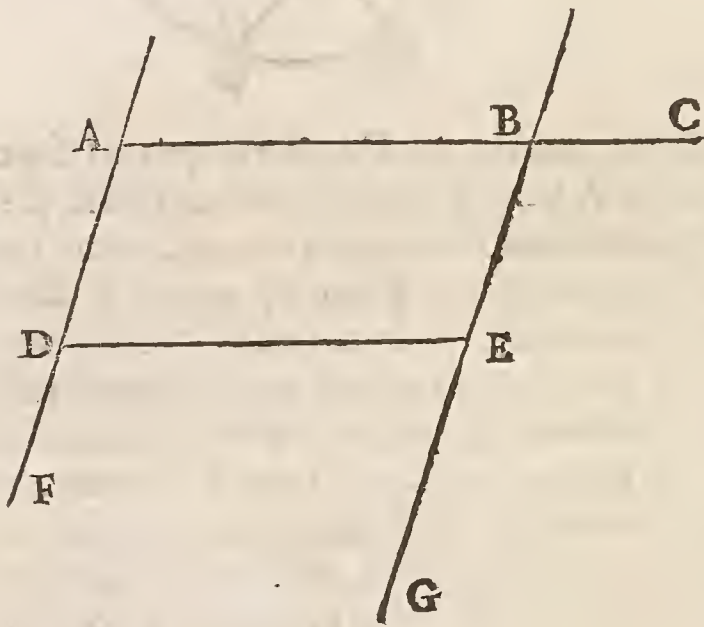
PROPOSITIO IV.

SI trianguli spatii magnitudine dati, positione & magnitudine basis data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget, parallelam nempe basi datæ, cujus inventione ex i. elem. facilè deduces omnia.

PROPOSITIO V.

SI rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuiusdam positioni datæ æquidistantis unus terminus contingat rectam lineam positione datam, & alius terminus rectam lineam positione datam continget.

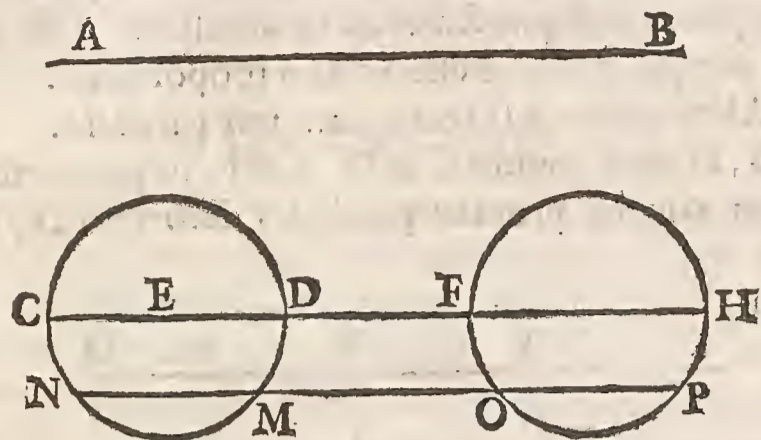
Data rectæ lineæ DE, magnitudine, & rectæ AC, positione datæ æquidistantis



unus terminus ut D, contingat rectam AF, positione datam si per punctum E, duxeris BEG, ipsi AF, parallelam constabit propositum. Erunt quippe rectæ omnes inter has duas parallelas interceptæ & rectæ AC, positione datæ æquidistantes, inter se æquales: quod ipsa constructio manifestat. Si igitur alter terminus cujuslibet sit ad rectam AF, erit alius ad BG, ut vult propositio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

Sit enim data AB, positione cui æquidistet recta NO, magnitudine data, cujus punctum N, sit ad circumferentiam circuli CNM, positione dati; Aio punctum O, esse ad circumferentiam positione datum. Esto E, centrum circuli CNM, & ducta diameter ipsi NO, parallela continuetur in F, donec recta CF, æquetur NO, datæ, dabitur recta CF, positione, & magnitudinæ, producat, & fiat FH, æqualis CD, su-

per $F H$, descriptus circulus præstabit propositum, erit quippe punctum O , ad ipsius circumferentiam cum enim punctum O , sit ad circumferentiam circuli $F O P$, erunt



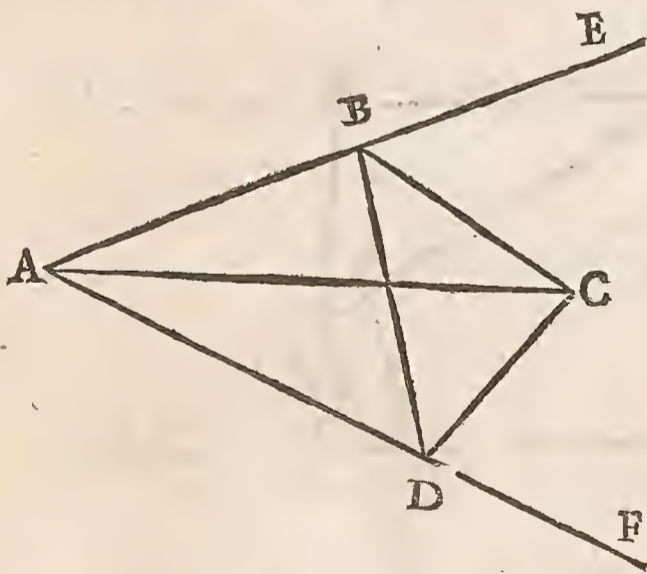
rectæ $C N$, $F O$, æquales & parallelæ, cum æquales & parallelas $C F$, $N O$, conjungant; erunt igitur anguli $N C D$, $O F H$, æquales; quod quidem ita se habet cum rectæ $C D$, $F H$, sint æquales, & à rectis $N M$, $O P$, æqualiter distent. poterit igitur propositio Pappi universaliùs ita concipi.

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuiusdam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat locum planum positione datum, & alius terminus locum planum positione datum continget.

PROPOSITIO VI.

SI à Puncto ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo vel datam habentes proportionem vel quarum una simul cum ea ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit continget punctum rectam lineam positione datam.

Hujus propositionis duæ sunt partes, quarum prior hæc est. Sint duæ rectæ positione datæ $A E$, $A F$, in puncto A , concurrentes, & à puncto C , demittantur rectæ $C B$



$C D$, in datis angulis $C B A$, $C D A$, & sint rectæ $B C$, $C D$, in data proportione Aio punctum C , esse ad rectam lineam positione datam. Jungantur $A C$, $B D$, in quadrangulo $A B C D$, dantur tres anguli $A B C$, $A D C$, $B A D$, datur igitur angulus $B C D$, datur etiam ratio $B C$, ad $C D$, ex hypothese ergo datur specie triangulum $B D C$, & anguli $C B D$, $C D B$, reliqui igitur $A B D$, $A D B$, dantur, ideoque spe

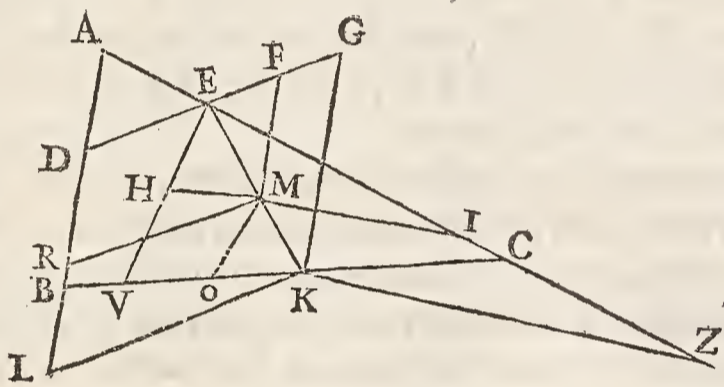
tionem datam data erit, quod vult propositio. Si igitur à puncto quodam ad positione duas rectas lineas inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in datis angulis quarum una simul cum ea ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit continget punctum rectam lineam positione datam.

PROPOSITIO VII.

SI sint quotcumque rectæ lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod datâ lineâ & ducta continentur, una cum contento datâ lineâ, & alterâ ductâ æquale ei, quod datâ, & aliâ ductâ & reliquâ continentur punctum rectam lineam positione datam, continget.

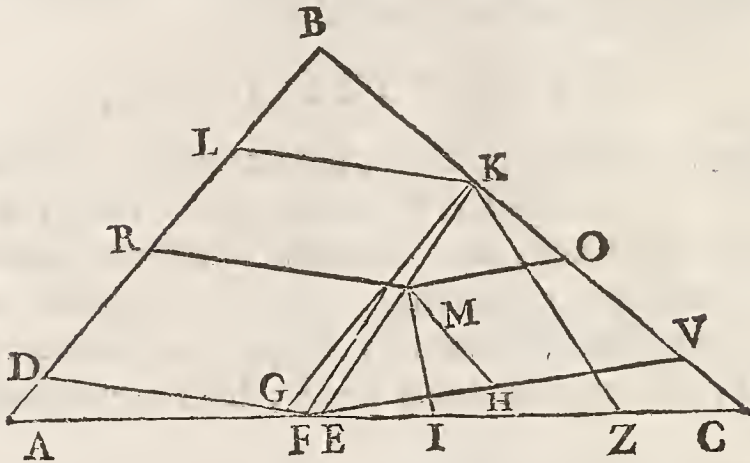
Hæc propositio est ampliatio præcedentis, & quod de duabus lineis est superius demonstratum in prima parte propositionis sextæ, hîc in quotcumque locum habere proponitur.

Exponantur tres rectæ positione datæ & triangulum constituentes AB, BC, CA , est inveniendâ recta EK , verbi gratia in qua sumendo quodlibet punctum vt M , & ab eo



ducendo rectas MR, MO, MI , in angulis datis. MRA, MOB, MIA , summa duarum $OM, \& MI$, sit ad MR , in ratione data, per primam partem propositionis præcedentis inveniatur recta in qua sumendo quodlibet punctum & ab eo ducendo rectas ad rectas AB, BC , ductæ sint in ratione datâ, dabitur positione recta quæsitâ, punctum igitur in quo concurret cum AC , dabitur, esto E , à quo ducantur EV, ED , ipsis MO, MR , parallelæ, ergo ex constructione VE , ad ED , habebit rationem datam, eâdem methodo sumptis AC, AB , rectis inveniatur punctum K , à quo ductæ KL, KZ , in datis angulis ipsis nempe MR, MI , parallelæ, sint in ratione data. Erit igitur similiter KZ , ad KL , in ratione datâ, iungatur EK , quodcumque punctum in ea sumpseris præstabit propositum. Sumatur M , verbi gratia ex jam constructis fiat MF , parallela BA , & MH , parallela BC , probandum est summam duarum OM, MI , esse ad MR ut VE , ad ED , in ratione nempe data, fiat adhuc KG , parallela BA , ponatur verum esse quod intendimus probare, ergo vicissim erit ut MR , ad ED , ita summa duarum MI, MO , ad EV , & dividendo erit ut differentia $MR, \& DE$, ad DE , ita differentia qua duæ OM, MI , superant EV , ad EV , cum autem MF , sit parallela BA , EF , erit differentia rectarum $MR, \& DE$, & cum MH , sit parallela BC , EH , erit differentia rectarum, MO, VE , ideoque differentia rectarum $IM, \& EH$, æquabitur excessui quo duæ MO, MI , superant rectam VE . Ex demonstratis igitur erit EF , ad DE , ut differentia rectarum IM, EH , ad EV , & vicissim EF , erit ad differentiam rectarum IM, EH , ut ED , ad EV , erit igitur convertendo differentia rectarum IM, EH , ad EF , in ratione data EV , ad ED , ex constructione autem (expositis tribus EH, EF, MI , est VE , ad EH , ut KE , ad EM , est etiam KZ , ad MI , in eadem ratione KE , ad EM , est etiam (cum KG , sit parallela BA ,) GE , ad EF in eadem ratione KE , ad EM , igitur tres rectæ

VE, KZ, EG , sunt in ratione trium HE, MI, EF , est igitur ut differentia duarum EV, KZ , ad EG , ita differentia duarum MI, EH , ad EF , sed probavimus



differentiam duarum MI, EH , ad EF , habere rationem datam EV , ad ED , igitur differentia duarum EV, KZ , ad EG habebit rationem datam EV , ad ED , & vicissim differentia duarum EV, KZ , ad EV erit ut EG , ad ED , & componendo KZ , erit ad EV , ut GD , ad ED , sed propter parallelas KG, BA, KL , æquatur DG , igitur vicissim erit ut KZ , ad KL , ita EV , ad ED , quod quidem ita se habere jam ex ipsa constructione innotuerat.

Constat itaque veritas pulcherrimæ propositionis, nec est difficilis aut abfimilis ad ulteriores casus, & quotlibet lineas porrigendas constructio, & demonstratio, semper enim beneficio constructionis in duabus lineis expedietur problema in tribus lineis: beneficio constructionis in tribus lineis expedietur problema in quatuor lineis: beneficio constructionis in quatuor expedietur problema in quinque, & simili omninò ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

SI ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas vel proportionem habentes vel spatium continentes datum, vel ita ut species ab ipsis ductis, vel excessus specierum sit æqualis spatio dato punctum continget positione datas rectas lineas.

Hujus propositionis (si vera esset) quatuor essent partes, sed eam in ratione datâ, veram duntaxatprehendimus; valeant igitur reliqua de spatio contento sub duabus, & de summa, aut differentiâ quadratorum ab ipsis, & tanquam commentitia, aut huc aliundè translata rejiciantur.

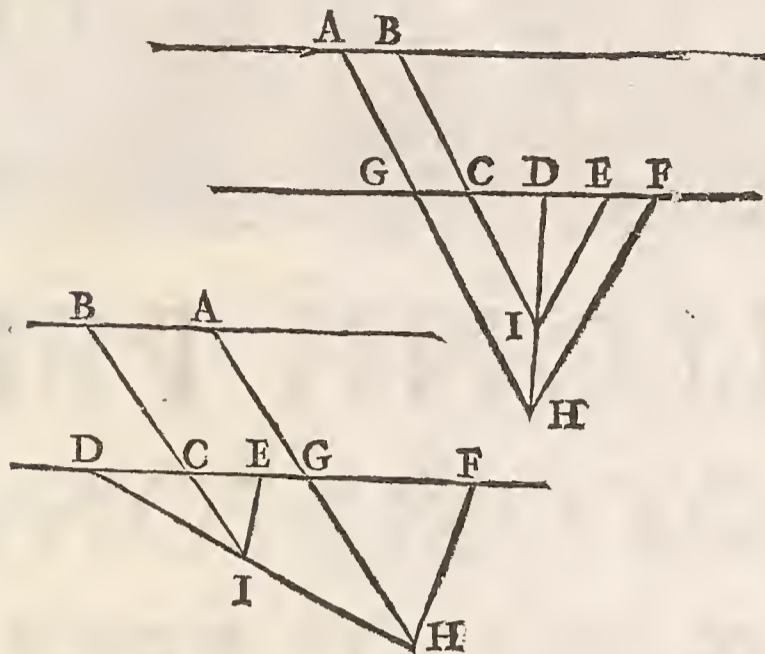
Proponatur itaque sic emendatum Theorema.

Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas proportionem habentes datam, punctum continget positione datam rectam lineam.

Constructio sic procedet.

Sint datæ parallelæ AB, GC , puncta in ipsis data $A, & F$, angulus unus ex datis BAH , alter GFH , cum puncta $A, & F$, dentur, & anguli ad ipsa dabuntur, rectæ AH, FH , positione; ideoque punctum concursus H , dabitur etiam punctum G , in quo AH , secat parallelam GC , recta GF , in puncto D , ita secetur ut GD , ad DF , sit in ratione datâ, dabitur punctum D , jungatur DH , dabitur igitur positione DH . Aio rectam DH , præstare propositum; Hoc est sumpto in eâ quolibet puncto ut I ,

& ab eo ductis IB, IE , in angulis datis abscissam AB , ad datum punctum A , ad abscis-



sam EF , ad datum punctum F , esse in ratione data GD , ad DF , secet BI , parallelam GF , in C , erit ex constructione IB , parallela HA , cum fuerit demissa in angulo dato; hoc est ipsi HAB , æquali; erit etiam IE , parallela HF , GC , igitur propter parallelas æquatur AB , probandum superest, ut GC , ad EF , ita GD , ad DF , & vicissim ut GC , ad GD , ita EF , ad DF , hoc autem perspicuum est, ut enim HI , ad HD , ita GC , ad GD , & ut eadem HI , ad HD , ita EF , ad FD , esse igitur GC , ad EF , in ratione datâ fit perspicuum.

Sunt plures casus tam istius quàm præcedentium propositionum, quos invenire & addere cum sit facile, cur in his diutiùs immoremur?





APOLLONII PERGÆI PROPOSITIONES DE LOCIS PLANIS RESTITUTÆ.

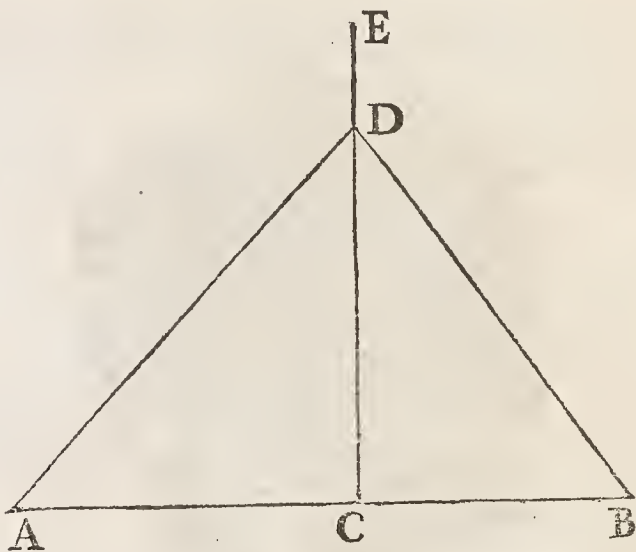
LIBER II.

PROPOSITIO I.



Si à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spatio differentia punctum positione datas rectas lineas continget.

Sint data duo puncta A, & B; & sit datum quodlibet spatium quadrato AB, minus: dividatur AB, in C, ita ut quadratum AC, quadratum CB, superet dato spatio; & educatur perpendicularis infinita CE, in qua sumatur quodlibet punctum D, & jungantur DA, BD, Aio quadratum AD, supe-

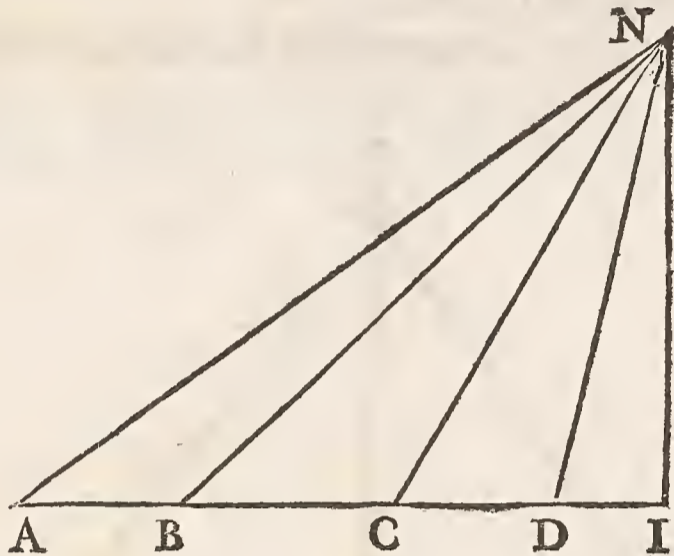


rare quadratum DB, dato. Quod quidem patet, cum quadratum AD, eodem superet quadratum DB, quo quadratum AC, superat quadratum CB.

Si spatium datum sit majus quadrato AB, punctum C, extra lineam AB, cadet. Ad hanc propositionem pertinere possunt duæ sequentes.

Sint data quatuor puncta ABCD, in rectâ lineâ, & sit AB, æqualis CD, sumatur aliud quodcumque punctum ut N, & jungantur quatuor rectæ NA, NB, NC, ND, Aio duo quadrata AN, ND, superare duo quadrata BN, NC, rectangulo sub AB, nBD, bis.

Nam ducatur perpendicularis NI , & primum punctum I , extra rectam lineam AD , cadat: patet igitur excessum quadratorum AN , ND , super duo quadrata BN , NC , propter omnibus commune quadratum NI , esse id, quo duo quadrata AI , ID , superant duo quadrata BI , CI , sed quadrata duo AI , DI , per quartam secundi æquantur quadrato DI , bis, quadrato AD , & rectangulo ADI , bis; quadrata verò BI , CI , per eandem propositionem æquantur quadrato DI , bis quadratis BD ,

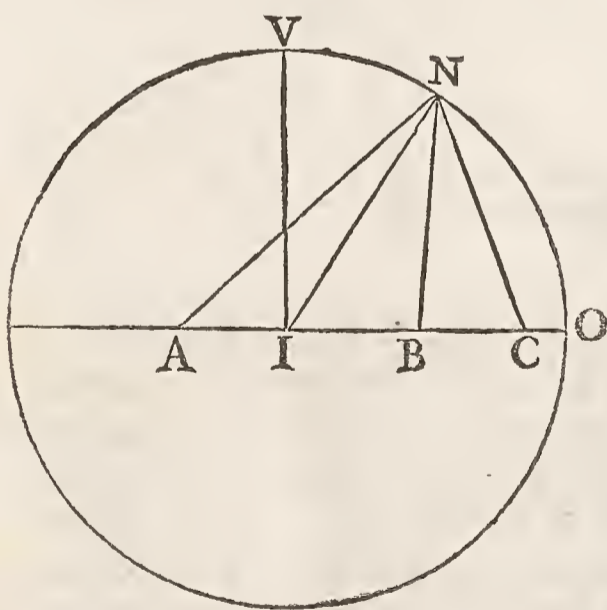


CD , & rectangulis sub BD , in DI , bis, & CD , in DI , bis, sive loco horum duorum rectangulorum uni rectangulo AD , in DI , bis, propterea quod AB , est æqualis CD , excessus igitur quadratorum AI , ID , super BI , CI , est idem qui AD , quadrat. super quadrata BD , CD , sive AB . Sed per quartam propositionem 2^a. quadratum AD , duo quadrata AB , BD , superat rectangulo sub AB , in BD , bis; constat ergo propositum.

Reliquos casus non adjungo neque in hac propositione neque in sequentibus, nam licet sit facile, esset tædiosum.

Si à tribus punctis in rectâ lineâ constitutis inflectantur rectæ, & sint duo quadrata tertio majora, spatium dato, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data tria puncta ABC , in rectâ lineâ, & datum quodlibet spatium rectangu-



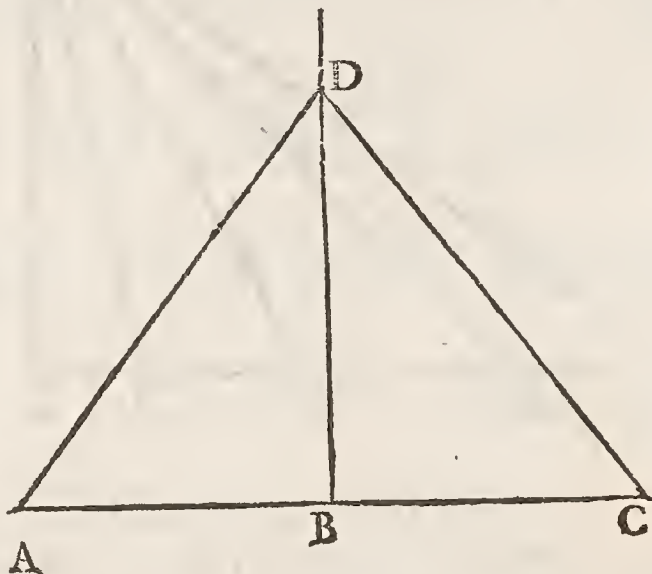
lo ABC , bis majus; fiat AI , æqualis BC , & spatium datum sit æquale rectangulo ABC , bis, & quadrato IV , centro I , intervallo IV , circulus VNO , describatur in cujus circumferentia punctum quodlibet sumatur ut N , junganturque NA , NB , NC , ad data puncta, aio duo quadrata AN , NC , quadratum NB , dato spatium superare; nam jungatur IN , ergò ex superiore propositione patet duo quadrata AN ,

NC , æquari duobus quadratis IN , BN , & rectangulo ABC , bis, ergo duo quadrata AN , NC , superant quadratum NB , quadrato IN , & rectangulo ABC , bis, & constat propositum.

PROPOSITIO II.

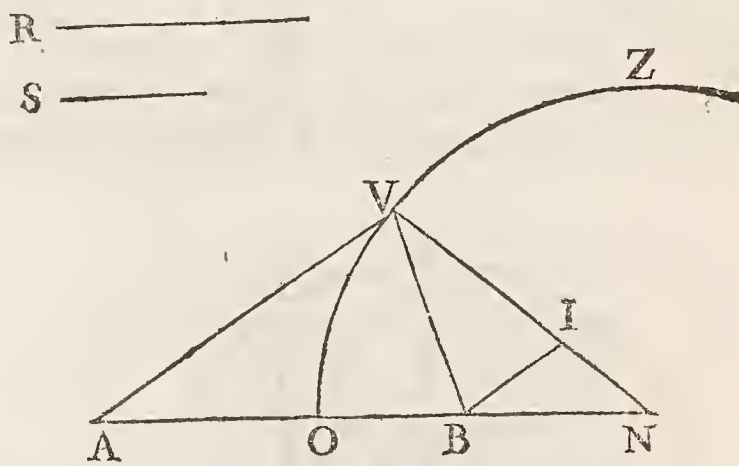
SI à duobus punctis inflectantur rectæ, & sint in proportione datâ, punctum constringet vel rectam lineam, vel circumferentiam.

Sint data duo puncta A , & C , & sit primùm data ratio æqualitatis: dividatur AC ,



bisariam in B , & excitetur perpendicularis BD , patet quodcumque punctum in ipsa sumatur ut D , fore rectos AD , DC , æquales.

Sed sit data ratio inæqualitatis.

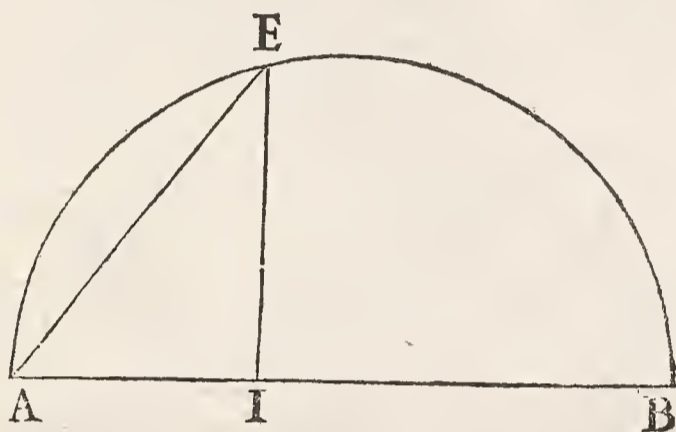


Et sint duo data puncta A , B , ratio ut R , ad S , fiat ut R , quadratum ad S , & ita AN , ad NB , inter AN , NB , sumatur media NO , cujus intervallo describatur circulus NOZ , & in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum ut V , junganturque VA , VB , Aio esse in datâ ratione R , ad S , nam iuncta VN , ipsi VA , parallela sit BI , ut AN , ad NO , sive NV , ad NB , & sunt circà eundem angulum ANV , similia igitur duo triangula ANV , BVN , & angulus VAB , angulo BVI , æqualis, Sed & AVB , VBI , propter parallelas æquales sunt, ergò similia triangula AVB , VBI , & est AV , ad VB , ut VB , ad BI , & ut VB , ad BI , id est AN , ad NB , id est R , quadratum ad S , quadratum, ita AN , quad. ad VB , Quad. est ergò AV , ad VB , ut R , ad S , & patet propositum.

PROPOSITIO III.

SI sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum à quo ducatur quaedam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur, & ad positionem, & sit quod sit à ductâ æquale ei quod à datâ, & abscissâ, vel ad datum punctum, vel ad alterum datum in linea datâ positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

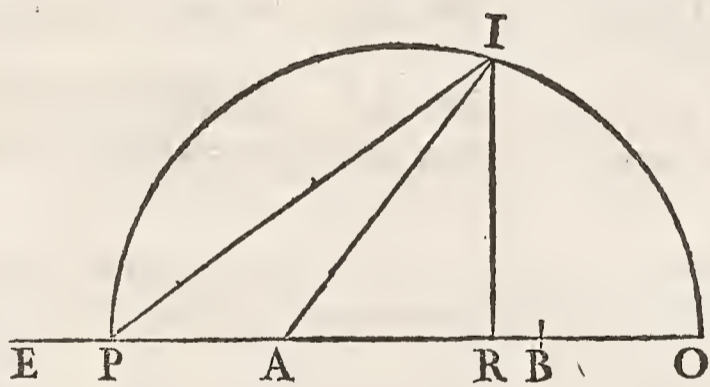
Sit data recta AB , positione & in ipsâ datum punctum A , oportet invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut E , & demittendo perpendicularem EI , quadratum AE , sit æquale rectangulo sub datâ qualibet rectâ &



AI . (per quam debemus intelligere in hâc propositione abscissam ad datum punctum) sit recta data AB , super AB , describatur semicirculus; patet ex constructione AB , in AI , æquari quadrato AE .

Sed alius casus est difficilior quando videlicet recta abscinditur ad aliud punctum quàm A , ut in hoc exemplo.

Sint data duo puncta AB , & præterea punctum E , in eâdem recta lineâ; recta

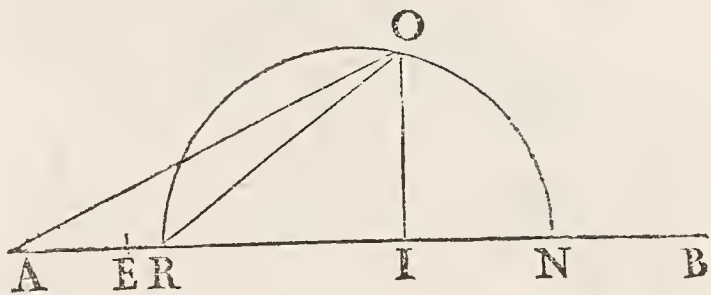


verò data sit AB , oportet invenire circuli circumferentiam ut PIO , in quâ sumendo quodlibet punctum ut I , & demittendo perpendicularem IR , quadratum AI , æquetur rectangulo sub rectâ AB , datâ & rectâ, ER , rectangulum BAE ; ad rectam BA , applicetur excedens figura quadrata & faciat latitudinem rectam AP , cui fiat æqualis BO , super PO , descriptus semicirculus præstabit propositum, nam quadratum AI , æquatur quadrato AR , & quadrato RI , quadratum verò RI , æquatur rectangulo, PRO , & rectangulum PRO , rectangulis ARB , OAP , hoc est BPA , hoc est BAE , ut mox demonstrabitur, quadratum ergo AI , æquatur quadrato AR , rectangulo ARB , & rectangulo BAE , sive quadratum AI , æquatur rectangulo BAR , (nam huic rectangulo æquantur quadratum AR , & rectangulum ARB ,) & rectangulo BAE , & adhuc hæc duo rectangula faciunt unum rectangulum sub BA , in ER , quod proinde quadrato AI , est æquale; probandum superest

rectangulum $P R O$, duobus rectangulis $A R B$, & $P B O$, æquale esse, nam ducendo inter se partes rectangulum $P R O$, est æquale singulis rectangulis $P A$, in $R B$, $P A$, in $B O$, hoc est $B O$, quadrato $A R$, in $R B$, $A R$, in $B O$, id est $P A$, in $A R$, sed duo $P A$, in $A R$, & $P A$, in $R B$, æquantur $P A$, in $A B$, sive $A B$, in $A O$, una cum $B O$, quadrato æquatur $A O B$, hoc est $P B O$, ergò rectangulum $A R B$, una cum rectangulo $P B O$, facit rectangulum $P R O$, quòd erat demonstrandum.

Diversos casus non prosequor, sed ex jam dictis facillimum erit: videtur tamen alius hujus propositionis casus non omittendus quando videlicet punctum E , ultra A , ut superiùs non invenitur.

Sint data duo puncta A , & E , & recta data $A B$, & sit inveniendæ circuli circumferentia ut $N O R$, ita ut sumendo quodlibet in ipsa punctum ut O , & demittendo

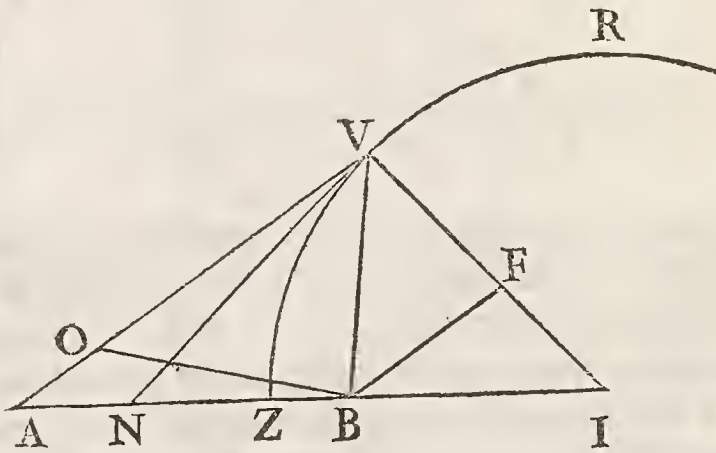


$O I$, perpendicularem, quadratum $A O$, sit æquale rectangulo sub $B A$, in $E I$, re-rectangulum $B A E$, ad rectam $B A$, applicetur deficiens in figura quadrata in R , & ipsi $A R$, fiat æqualis $B N$ super $R N$, descriptus semicirculus præstabit propositum. Demonstratio verò non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITIO IV.

SI à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera dato majus quàm in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint duo puncta A , & B , ratio data $A I$, ad $I B$, spatium datum $B A N$, inter $N I$, & $I B$, media sit $I Z$, cujus intervallo describatur circulus $Z V R$, in quo sumatur



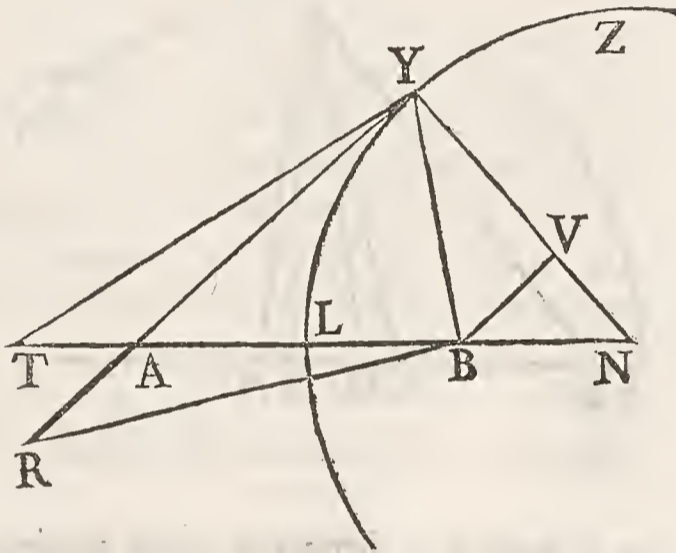
quodlibet punctum ut V , & jungantur $V A$, $V B$, Aio quadratum $A V$, quadrato $V B$, Majus esse quàm in proportione data $I A$, ad $B I$, spatium dato $B A N$, nam fiat ipsi æquale rectangulum $V A O$, & jungantur $O B$, $N V$, $V I$, & ipsi $A V$, parallela $B F$, probandum est rectangulum $A V O$, ad quadratum $V B$, esse ut $A I$, ad $I B$, est ut $N I$, ad $I Z$, id est $V I$, ut $V I$, ad $I B$, & sunt circa eundem angulum, ergò duo triangula $N I V$, $V B I$, sunt similia, & angulus $N V B$, angulo $B V F$, æqualis
sed

sed angulus VNB , angulo VOB , est æqualis in eadem sectione, cum quatuor puncta N, B, V, O , sint in circulo propter æqualia rectangula BAN, VAO , ergò angulus VOB , angulo BVF , est æqualis, sed & angulus OVB , angulo VBF , propter parallelas, ergò duo triangula OBV, BVF , sint similia & ut OV , ad VB , ita VB , ad BF , addatur utrinque communis ratio AV , ad VB , ergò ratio composita ex AV , ad VB , & ex VB , ad BF , hoc est ratio AV , ad BF , id est AI , ad IB , erit eadem rationi AV , ad VB , & OV , ad VB , hoc est rectanguli AVO , ad quadratum VB , quod demonstrare oportebat.

Videtur Pappus omisisse hoc loco propositionem huic similem quæ ita se habet.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera, dato minùs quam in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data duo puncta $A, & B$, ratio AN , ad NB , spatium BAT , inter TN, NB , esto media NL , cujus intervallo describatur circuli circumferentia LYZ , in qua sumpto quolibet puncto Y , jungantur YA, YB , aio quadratum YA , unà cum

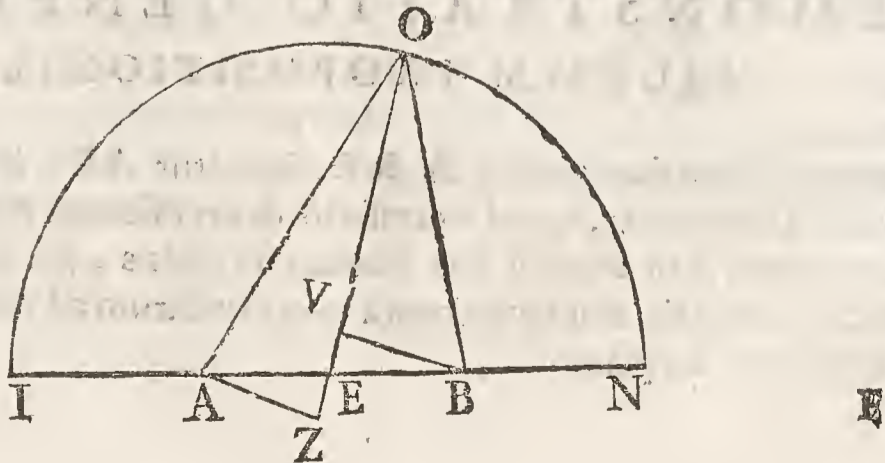


rectangulo BAT , dato, ad quadratum YB , esse ut AN , ad NB , nam fiat YAR , æquale BAT , & jungantur TY, RB, YN , & ipsi AY , parallela BV , propter BAT, YAR , æqualia rectangula probabitur angulus YTB , angulo YRB , æqualis & reliqua ut in superiore demonstratione.

PROPOSITIO V.

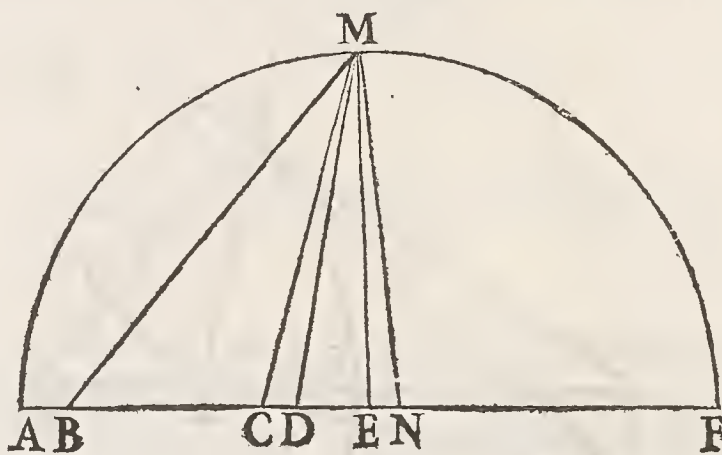
Si à quocunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Sint data duo primùm puncta AB , quæ per rectam AB , jungantur, bifariam scindatur in E , centro E , intervallo quocumque ut EI , circulus describatur ut ION .



dico quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris ut O , evenire ut quadrata AO , OB , simul quadratorum IE , AE , sint dupla. Nam junctâ rectâ EO , in ipsam BV , AZ , perpendiculares demittantur, in triangulo $AE O$, quadratum AO , æquatur quadratis AE , EO , & rectangulo OEZ , bis, in triangulo OEB , quadrata OE , EB , æquantur quadrato OB , & rectangulo $OE V$, bis, sive OEZ , bis cum EV , sit æqualis EZ , propter æquales AE , EB , ergò jungendò æqualia æqualibus, quadrata AO , OB , & rectangulum OEZ , bis, æquantur quadratis AE , EB , sive quadrato EA , bis & quadrato EO , bis, id est quadrato IE , bis, unâ cum rectangulo OEZ , bis, auferatur utrinque OEZ , bis, supererit verum quod asserabamus, & constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E , in recta linea & sit recta BD , recta DE , major, differentiæ inter BD , & DE , sit tertia pars CD , centro E , intervallo quocumque ut EA , describatur semicirculus AMF , aio quodcumque punctum in ipsius circumferentia

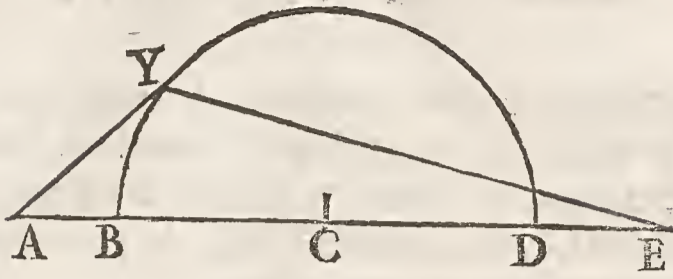


sumpseris ut M , eandem semper fore summam trium quadratorum MB , MD , ME , nam jungantur MB , MC , MD , ME , ipsi vero CD , fiat æqualis EN , & jungatur MN , cum BD , superet DE , triplâ CD , sive triplâ EN , ergò DN , unâ cum duplâ CD , æquabitur BD , & CN , unâ cum CD , æquabitur BD , auferatur utrinque CD , ergò CN , æquabitur BC , cum CD , sit æqualis EN , per secundam hujus libelli propositionem, idem erit semper excessus quadratorum CM , MN , super duo quadrata DM , ME , sed CM , quadratum est semper idem: ergò duo quadrata DM , ME , semper vel quadrato MN , æqualia erunt vel in idem excedent, vel in idem deficient. Addatur utrinque quadratum MB , ergò tria quadrata MB , MD , ME , duobus quadratis BM , MN , vel semper æqualia erunt, vel in idem excedent, vel in idem deficient, sed BM , MN , quadrata idem semper conflant spatium ex superiori propositione propter æqualitatem rectarum BC , CN , ergò quadrata BM , DM , EM , idem semper spatium conficiunt, quod erat demonstrandum.

DEMONSTRATIO GENERALIS EJUSDEM PROPOSITIONIS.

EXponantur primò duo puncta A , & E , jungatur AE , & bifariam dividatur in C , planum datum sit Z , quod necessariò debet esse non minùs quadratis duobus AC , AE , ut patet, si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C , tantùm proposito satisfaciet; nec erit aliud punctum à quo junctarum ad puncta $A E$, quadrata simul sumpta æquentur Z , plano.

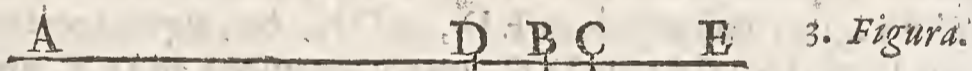
Si sit majus duobus quadratis AC, CE , excessus dimidium æquetur quadrato



CB , centro C , intervallo CB , descriptus circulus satisfaciet proposito, quod tanquam à Pappo demonstratum & ab aliis, & proclive nimis omitemus ne in facilibus diutius immoremur.

Lemma ad generalem methodum.

EXponantur in 1. 2. & 3. figura quotlibet puncta data $ABCE$, & pro numero punctorum sumatur rectorum puncto A ; & reliquis datis terminatarum pars conditionaria AD , quadrans nempe in hoc exemplo; sit igitur AD , pars quarta rectorum AB, AC, AE , puncti D , diversa est positio prout variant casus. Aio rectas punctis datis & puncto D , à parte puncti A terminatas æquari rectis, punctis datis, & puncto D , à parte puncti E , terminatis, in 1. nempe figura rectam ED , æquari rectorum AD, BD, CD , in 2. figura rectas ED, CD , æquari rectorum BD, AD , & in 3. figura rectas ED, CD, BD , æquari AD ; in 1. & in 3. figura ex hypothési quater AD ,



æquatur rectorum AB, AC, AE , dematur utrinque AD , ter, remanebit illi AD , semel, sed auferre AD , ter, ab ipsis AB, AC, AE , idem est atque auferre AD , semel ab unaquaque ipsarum AB, AC, AE , quo peracto remanebunt istinc BD, CD, ED , æquales AD , quod erat demonstrandum.

Si darentur quinque puncta AD , quinquies esset conferenda cum quatuor rectorum punctis datis & puncto A , terminatis: denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

In 2. figura AD , quater, æquatur rectorum AB, AC, AE , auferatur utrinque AD , ter, & addatur BD , remanebunt AD, BD , æquales ED, CD .

In 1. figura AD , quater æquatur rectorum AB, AC, AE , addatur utrinque BD, CD , & dematur AD , ter, remanebunt rectæ AD, BD, CD , æquales rectæ DE .

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacunque ratione variant casus.

Lemma Alterum.

EXponatur in 1. figura constructio præcedens & sumatur in eadem recta punctum N , utcumque. Aio quadrata rectarum punctis datis & puncto N , terminatarum superare quadrata rectarum punctis datis, & puncto D , terminatarum quadrato DN , toties sumpto quot sunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo.

Secunda & tertia figura varios casus repræsentant.

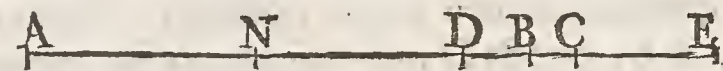
1. *Figura.*



2. *Figura.*



3. *Figura.*



In 1. figura quadrata AN , BN , EN , superant quadrata AD , BD , CD , si unumquodque unicuique conferas, quadrato DN , ter & rectangulis AD , in DN , bis, BD , in DN bis CD , in DN , bis, quadrata igitur AN , BN , CN , æquantur quadratis, AB , BD , CD , quadrato DN , ter, & rectangulis AD , in DN , bis, DB , in DN , bis, & CD , in DN , bis: illud autem patet ex genesi quadrati à binomia radice affirmatâ effecti. Ex alia autem parte quadratum EN , æquatur quadratis ED , ND , minus ED , in DN , bis, illudque patet ex genesi quadrati à binomia radice negata effecti. Ergò quadrata quatuor AN , BN , CN , EN , æquantur quadratis quatuor AD , BD , CD , ED , quadrato DN , quater, rectangulis AD , in DN , bis, BD , in DN , bis, CD , in DN , bis, minus ED , in DN , bis, si igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis manebit veritas propositionis stabilita, nempe quadrata AN , BN , CN , EN , superare quadrata AD , BD , CD , ED , quadrato DN , quater.

Probandum igitur rectangulum ED , in DN , bis, æquari rectangulis AD , in DN , bis, BD , in DN , bis, CD , in DN , bis; & omnibus ad DN , applicatis rectam ED , æquari rectis AD , BD , CD , quod quidem ita se habere superius lemma demonstravit.

Varios casus non moramur, si sint quinque puncta quadrata punctis datis, & puncto N , terminata, superabunt quadrata punctis datis & puncto D , terminata, quintuplo quadrati DN , nec differt à tradito casu ulterior demonstratio.

Inde patet summam quadratorum puncto D , terminatorum esse minimam.

Dum tibi loquimur, scrupulosam nimis casuum observationem non adjungimus. Conclusio secundi Lemmatis semper eò deducetur ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex alterâ, ideoque res ad primum Lemma deducetur.

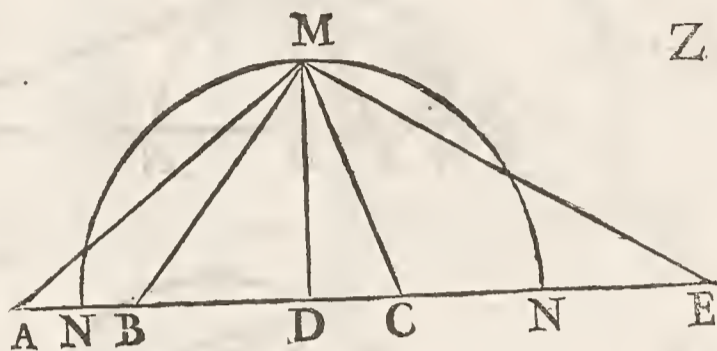
PROPOSITIO I. Generalis.

EXponatur superior figura & sint data quatuor puncta in recta AE , A , B , C , E , esto AD , quarta pars (conditionaria nempe) rectarum AB , AC , AE , & sit datum Z , planum. Proponitur invenire circulum in quo sumendo quodlibet punctum, & ab conjungendo rectas ad puncta data quadrata junctarum simul sumpta æquentur spa-

tio dato, Z, planum debet esse majus quatuor quadratis AD, BD, CD, ED, ut locum habeat propositio ex superius demonstratis.

Arguetur igitur quatuor illis quadratis, & præterea quadruplo quadrati DN, centro D, intervallo DN, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N, ex utraque parte, demonstratum est secundo Lemmate quadrata AN, BN, CN, EN, æquari quadratis, AD, BD, CD, ED, & præterea quadrato DN, quater, at quadrata AD, BD, CD, ED, unâ cum quadrato DN, quater æquantur Z, plano, ergo quadrata quatuor AN, BN, CN, EN, æquan-



tur Z, plano, hoc est spatium dato quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis DM, & jungantur AM, BM, CM, EM. Aio quatuor illa quadrata æquari spatium dato Z, plano, nam quadratum AM, æquatur quadrato AD, & quadrato DM.

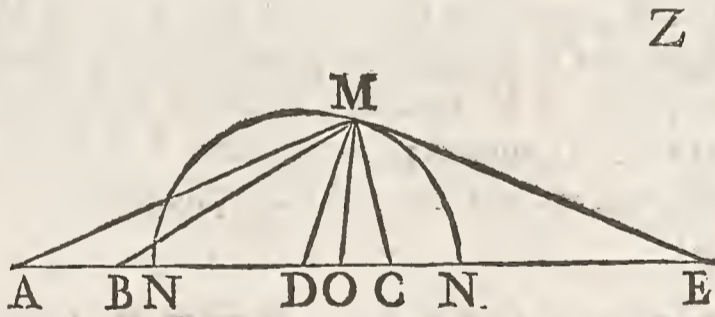
Quadratum BM, æquatur quadrato BD, & quadrato DM.

Quadratum CM, æquatur quadrato CD, & quadrato DM.

Quadratum EM, æquatur quadrato ED, & quadrato DM.

Ergo quatuor quadrata AM, BM, CM, EM, æquantur quadratis quatuor AD, BD, CD, ED, unâ cum quadrato DM, sive DN, quater, ut quadrata AD, BD, CD, ED, unâ cum quadrato DN, quater æquantur Z, plano seu spatium dato, ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM, æquantur spatium dato, quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M, à quo demittatur perpendicularis MO, Similiter probabitur quadrata AM, BM, CM, EM, æquari quadratis AO, BO,



CO, EO, quæ ex secundo lemimate æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, & præterea quadrato OD, quater, ergo quadrata quatuor AM, BM, CM, EM, æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, unâ cum quadrato OD, quater, & præterea quadrato OM, quater, sed quadratum OD, quater, unâ cum quadrato OM, quater æquatur quadrato DM, quater sive quadrato DN, quater, sunt enim DM, DN, ex centro æquales inter se, igitur quadrata AM, BM, CM, EM, æquantur quadratis AD, BD, CD, ED, unâ cum quadrato DN, quater, ideoque spatium dato Z, plano sunt æqualia, quod erat demonstrandum.

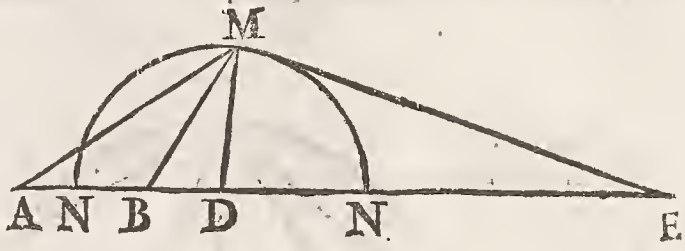
Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit, &

ad quotlibet puncta eadem facilitate & argumentatione extendetur, semper enim toties sumuntur quadrata DM, DN, DO , quot erunt puncta nec fallat ratiocinatio.

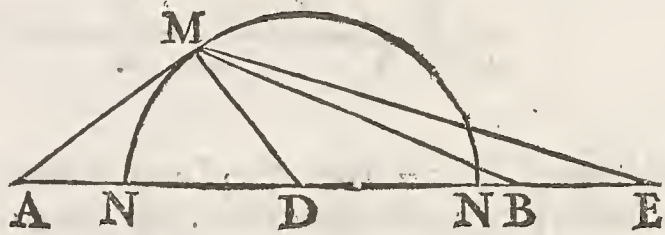
Inde sequitur corollarium cujus usus in sequenti propositione.

Exponentur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E , & inveniendus circulus DNM , in quo sumendo quodlibet punctum ut M , & jungendo rectas AM ,

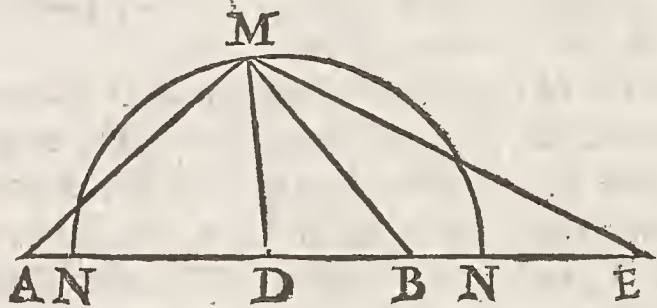
AD 4. pars AB 2. $\rightarrow E$.



AD 4. pars AB $\rightarrow E$.



AD 4. pars AB $\rightarrow AE$.



BM, EM , quadrati AM , duplum (verbi gratia) una cum quadratis BM, EM , æquentur spatio dato, eo casu sumenda est ad constructionem recta AD , pars quarta rectorum AB, AE , quia hoc casu punctum A , gerit vicem duorum punctorum & idem est ac si diceretur datis punctis quatuor A, A, B, E , invenire circulum NM , in quo sumendo quodlibet punctum ut M , quadrata quatuor AM, AM, BM, EM , æquentur spatio dato, idem est intelligendum in alio quovis puncto, & alia qualibet ratione multiplici, nam proponatur quadratum AM , una cum quadrato EM , bis, & quadrato EM , æquari spatio dato, sumenda est AD , quarta pars rectorum AB , bis & AE , quod advertisse & monuisse fuit necesse, nec indiget res majori explicatione.

PROPOSITIO ALTERA.

EXPONANTUR quotlibet puncta data in recta AE , quatuor (verbi gratia) A, B, C, E , & punctum Z , extra rectam AE , quæritur circulus ut MI , in quo sumendo quodlibet punctum ut I , quadrata AI, BI, CI, EI, ZI , æquentur spatio dato.

Demittatur in rectam AE , perpendicularis ZR , & rectorum AR, AB, AC, AE , sumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac specie in qua dantur quinque puncta) AD , & excitata perpendiculari DO , demittatur in ipsam perpendicularis ZO , rectæ ZR , sumatur pars conditionaria (quintans nempe) RF , sive DN , & fit spatium datum æquale quinque quadratis AD, RD, BD, CD, ED , & præterea Z ,

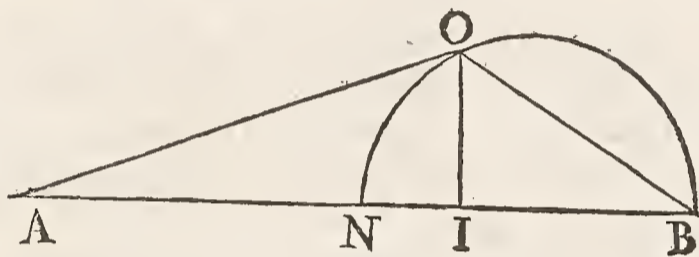
ſextans nempe reſtarum AG , BH , CI , KD , EM , FN , & ſit ſpatium datum æquale quadratis AO , BO , CO , DO , EO , FO , & ſextuplo quadrati OP , circulus centro, O , intervallo OP , deſcriptus ſatisfaciet propoſitioni, nec difficilis eſt inventio ei qui ſuperiores noverit.

PROPOSITIO VI.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad poſitione ductam lineam abſciſſa à recta lineæ poſitione data ad datum punctum, & ſint ſpecies ab inflexis æquales ei quod à data & abſciſſâ continetur, punctum ad inflexionem poſitione datam circumferentiam continget.

Deſcripſi propoſitionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex verſione Federici Commandini, ſed vel in textu græco vel in interpretatione mendum eſſe non dubito. Senſum propoſitionis exponam.

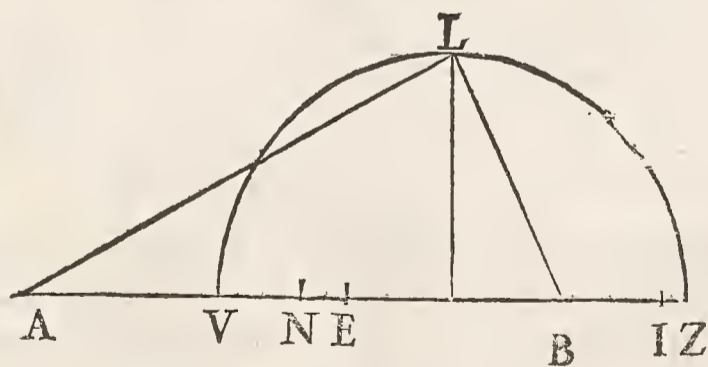
Sint duo puncta A , & B , oportet invenire circumferentiam ut N, O, B , in qua ſumendo quodlibet punctum ut O , & jungendo rectas OA , OB , & demittendo



perpendicularem OI , rectangulum ſub recta data in AI , æquetur duobus quadratis AO , OB , ſit primum A, B , recta data, qui caſus ſatis eſt facilis, ſumatur ipſius AB , dimidium BN , ſuperque BN , ſemicirculus deſcribatur, aio ſatisfacere propoſito, hoc eſt ſi ſumatur, verbi gratia, punctum O , rectangulum BAI , duobus quadratis AO , OB , æquale eſſe; nam AO , quadratum æquatur AI , quadrato & IO , quadrato ſi à rectangulo BAI , auferatur quadratum AI , & quadratum IO , ſivè rectangulum BI , in IN , ſupereſt rectangulum ſub BI , in AN , ſive in NB , quod probandum eſt eſſe æquale quadrato BO , & patet ex conſtructione ita ſe habere.

Secundus caſus eſt quando recta data major eſt rectâ AB , cujus conſtructionem dabimus modo recta data ſit minor duplâ AB .

Sint data duo puncta A , & B , & recta AI , duplâ AB , minor ex hypoteſi; oportet



facere quod proponitur. Recta AB , bifariam ſecetur in N , & fiat NE , ipſius BI , dimidia quod ex conſtructione licet, rectangulum IBN , ad rectam BE , applicetur, excedens figurâ quadratâ, & faciat latitudinem rectam EV , cui fiat æqualis recta BZ , & ſuper VZ , deſcribatur ſemicirculus VLZ , aio ſatisfacere propoſito, nam junctis

drato ex FE , quorum rectangulum FAB , est æquale rectangulo EAL , reliquum igitur rectangulum AEL , rectangulo AFB , & quadrato ex FE , æquale erit, rectangulum autem AEL , æquale est rectangulo HEK , & rectangulum AFB , quadrato ex FG , ergo rectangulum HEK , quadratis ex EF , EG , hoc est quadrato ex EG , est æquale.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

ET si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam circulus autem non ponatur, quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

Hæc propositio est conversa præcedentis & ex ea facile elici potest hujus demonstratio si contraria viâ utamur.

Determinationes & casus non adjungimus quia ex constructione & demonstratione satis patent.





DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANS-

mutatione, & emendatione, ad multimo-
dam curvilinearum inter se, vel cum rectili-
neis comparationem.

CVI ANNECTITVR

*PROPORTIONIS GEOMETRICÆ
in quadrandis infinitis parabolis & hyperbolis usus.*



N unica parabolæ quadraturâ proportionem geometricam usurpa-
vit Archimedes. In reliquis quantitatum heteroginearum compara-
tionibus, arithmetica dumtaxat proportioni sese adstrinxit. An
ideo quia proportionem geometricam minùs *μετρωμένη* est ex-
pertus? An verò quia peculiare ab illa proportione petitum artifi-
cium ad quadrandam primariam parabolam, ad superiores derivari
vix potest? Nos certè hujusmodi proportionem quadratorum fe-
racissimam & agnoscimus, & experti sumus, & inventionem nostram quæ eadem om-
nino methodo & parabolæ & hyperbolæ quadrat, recentioribus geometris haud illi-
benter impertimur.

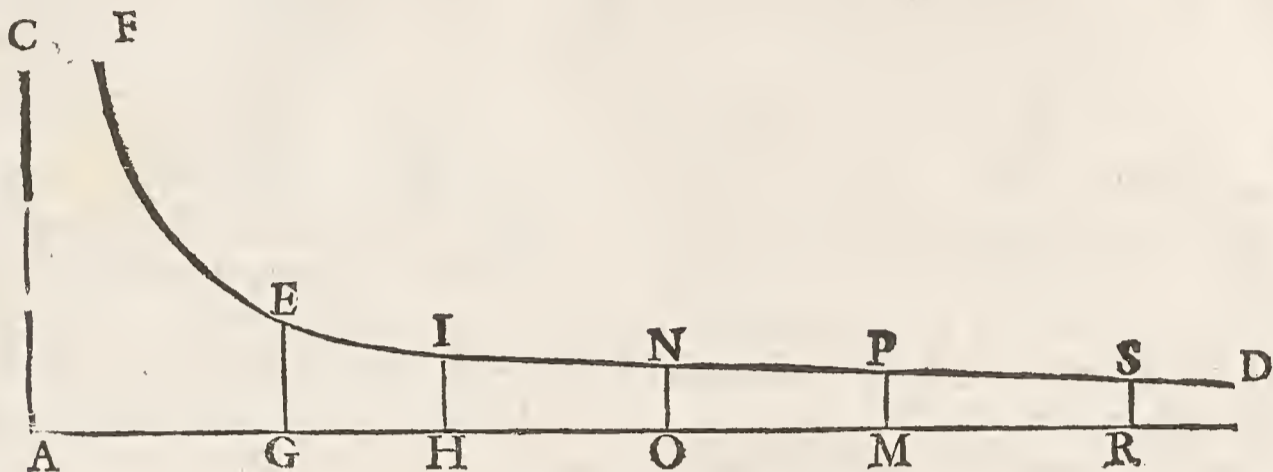
Unico quod notissimum est proportionis geometricæ attributo, tota hæc methodus
innititur.

Theorema hoc est: Datâ quavis proportione geometricâ cujus termini decreſcant in
infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium, ad minorem
terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum
sumptos.

Hoc posito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ. Hyperbolæ autem defini-
mus infinitas diversæ speciei curvas, ut $DSEF$, quarum hæc est proprietas, ut positis
in quolibet angulo dato RAC , ipsarum asymptotis rectis AR , AC , in infinitum, si
placet, non secùs ac ipsa curva extendendis, & ductis uni asymptotæ parallelis rectis
quibuslibet GE , HI , ON , MP , RS , &c. sit ut potestas quædam rectæ AH , ad po-
testatem similem rectæ AG , ita potestas rectæ GE , vel similis vel diversa à præceden-
te, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI , potestates autem intelligimus, non so-

lùm quadrata , cubos , quadratoquadrata , &c. quarum exponentes sunt. 2. 3. & 4. &c. sed etiam latera simplicia , quorum exponens est unitas. Aio itaque omnes in infinitum hujusmodi hyperbolas , unicâ demptâ , quæ Apolloniana est , sive primaria , beneficio proportionis geometricæ uniformi & perpetua methodo quadrari posse.

Exponatur , si placet , hyperbola , cujus ea sit proprietas , ut sit semper ut quadratum rectæ HA , ad quadratum rectæ AG , ita recta GE , ad rectam HI , & ut quadratum



OA , ad quadratum AH , ita recta HI , ad rectam ON , &c. Aio spatium infinitum , cujus basis GE , & curva ES , ex uno latere , ex alio vero asymptotos infinita GOR , æquari spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi , quorum primus sit AG , secundus AH , tertius AO , &c. in infinitum , & ad se se per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut juxta Methodum Archimedæam , parallelogrammum rectilineum sub GE , in GH , quadrilineo mixto GHE , adæquetur , ut loquitur Diophantus , aut ferè æquetur.

GE , in GH .

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium GH , HO , OM , & similia sint ferè inter se æqualia , ut commodè per ἀπαγωγήν εἰς ἀδύνατον , per circumscriptiones & inscriptiones Archimedæa demonstrandi ratio institui possit , quod semel monuisse sufficiat , ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius & iterare cogamur.

His positis , cum sit ut AG , ad AH , ita AH , AO , & ita AO ad AM , erit pariter ut AG , ad AH : ita intervallum GH , ad HO , & ita intervallum HO , ad OM , &c. Parallelogrammum autem sub EG , in GH , erit ad parallelogrammum sub HI , in HO , ut parallelogrammum sub HI , in HO , ad parallelogrammum sub NO , in OM , cùm enim ratio parallelogrammi sub GE , in GH , ad parallelogrammum sub HI , in HO , componatur ex ratione rectæ GE , ad rectam HI , & ex ratione rectæ GH , ad rectam HO : sit autem ut GH , ad HO , ita AG , ad AH , ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi sub EG , & GH , ad parallelogrammum sub HI , in HO , componitur ex ratione GE , ad HI , & ex ratione AG , ad AH , sed ut GE , ad HI , ita ex constructione HA , quadratum , ad quadratum GA , sive propter proportionales : ita recta AO , ad rectam GA . Ergo ratio parallelogrammi sub EG , in GH , ad parallelogrammum sub HI , in HO , componitur ex ratione AO , ad AG , & AG , ad AH , sed ratio AO ad AH , componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum sub GE , in GH , est ad parallelogrammum sub HI , in HO , ut OA , ad HA ; sive ut HA , ad AG .

Similiter probabitur parallelogrammum sub HI , in HO , esse ad parallelogrammum sub ON , in OM , ut AO , ad HA , sed tres rectæ quæ constituunt rationes parallelogrammorum , rectæ nempe AO , HA . GA , sunt proportionales ex constructione.

Ergo parallelogramma in infinitum sumpta sub GE , in GH , sub HI , in HO , sub ON , in OM , &c. erunt semper continuè proportionalia in ratione rectæ HA , ad GA . Est igitur ex theoremate hujus methodi constitutivo ut GH , differentia terminorum rationis ad minorem terminum GA , ita primus parallelogrammorum progressionis terminus, hoc est parallelogrammum sub EG , in GH , ad reliquos in infinitum parallelogrammos, hoc est ex adæquatione Archimedæa ad figuram sub HI , asymptoto HR , & curvâ in IND , in infinitum extendendâ contentam. Sed ut HG , ad GA , ita sumptâ communi latitudine recta GE , parallelogrammum sub GE , in GH , ad parallelogrammum sub GE in GA . Est igitur ut parallelogrammum sub GE , in GH , ad figuram illam infinitam, cujus basis HI , ita idem parallelogrammum sub GE , in GH , ad parallelogrammum sub GE , in GA , ergo parallelogrammum sub GE , in GA , quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum sub GE , in GH , quod propter minutissimos *τεμαχισμὸς* evanescit & abit in nihilum, superest verissimum, & Archimedæâ licet prolixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum AE , in hac hyperbolæ specie, æquari figuræ sub base GE , asymptoto GR , & curvâ ED , in infinitum producendâ contentæ. Nec operosum ad omnes omnino hujusmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere.

Sit enim ea alterius, si placet, hyperbolæ proprietâs, ut sit GE , ad HI ; ut cubus rectæ HA , ad cubum rectæ GA , & sic de reliquis. Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut supra serie fient proportionalia parallelogramma EH , IO , MN , ut supra in infinitum. In hoc verò casu parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, &c. ut recta AO , ad GA , quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur ut parallelogrammum EH , ad figuram, ita recta OG , ad GA , & sumptâ communi latitudine GE , ita parallelogrammum sub OG , in GE , ad parallelogrammum sub GE , in GA , est igitur ut parallelogrammum sub OG , in GE , ad parallelogrammum sub GE , in GH , ita parallelogrammum sub GE , in GE , ad parallelogrammum sub GE , in GH , ita parallelogrammum sub GE , in GH , ad figuram & vicissim ut parallelogrammum sub OG , in GE , ad parallelogrammum sub GE , in GH , ita parallelogrammum sub GE , in GA , ad figuram. Ut autem parallelogrammum sub OG , in GE , ad parallelogrammum sub HG , in GE ; ita OG , ad GH , sive 2. ad 1. ea adæquatione, intervalla enim basi proxima facta sunt ex constructione ferè æqualia. Inter se ergo in hac hyperbola parallelogrammum EGA , quod est æquale spatium rectilineo dato, est duplum figuræ sub base GE , asymptoto GR , curva ESD , in infinitum producenda contentæ.

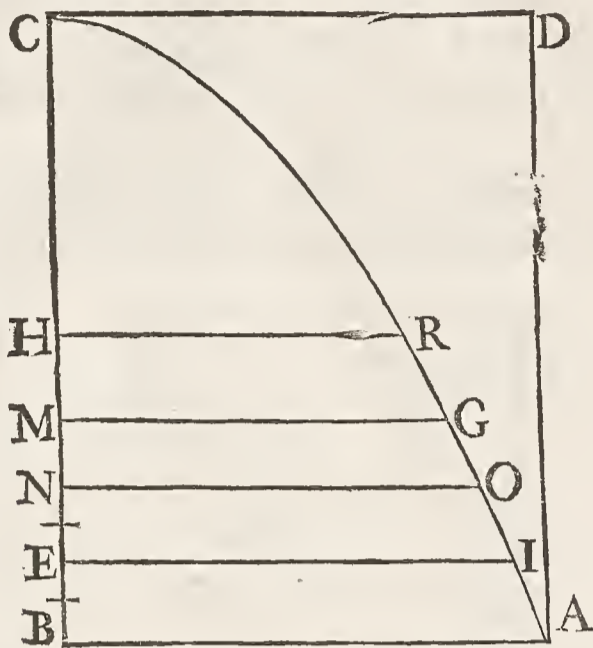
Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio, nisi quod in primaria, sive Apolloniana & simplici hyperbola deficit eâ solâ ratione methodus; quia in hac parallelogramma EH , IO , NM , sunt semper inter se æqualia; atque ideo cum termini progressionis constitutivi, sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia, quæ totum in hoc negotio conficit mysterium.

Demonstrationem quâ probatur spatia in hyperbola communi parallelogrammis contenta, esse semper inter se æqualia, non adjungimus, cum statim per se ipsa se prodant; & ex hac unica proprietate quæ asserit in ea specie esse ut GE , ad HI , ita HA , ad GA , facillimè derivetur.

Eadem ratione parabolæ omnes omnino quadrantur, nec est ulla quæ ab artificio nostræ methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.

Unicum in parabola, si lubet, primariâ & Apollonianâ adjiciemus exemplum; cujus exemplo reliquæ omnes in quibuslibet in infinitum parabolis demonstrationes expedientur.

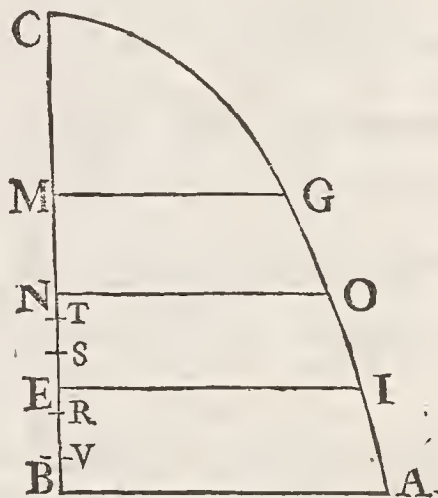
Sit femiparabole primaria $A G R E$, cujus diameter $C B$, femibasis $A B$, sumptis autem applicatis $I E$, $O N$, $G M$, &c. fit semper ut quadratum $A B$, ad quadratum



$I E$, ita recta $B C$, ad $C E$, & ut quadratum $I E$, ad quadratum $O N$, ita recta $E C$, ad $C N$, & sic in infinitum ex proprietate specificæ parabolæ Apollonianæ. Intelligantur ex more methodi rectæ $B C$, $E C$, $N C$, $M C$, $H C$, &c. in infinitum continuè proportionales. Erunt etiam, ut superius probatum est, proportionalia parallelogramma, $A E$, $I N$, $O M$, $G H$, &c. in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi $A E$, ad parallelogrammum $I N$, recurrendum ex methodo ad compositionem proportionum, componitur autem ratio parallelogrammi $A E$, ad parallelogrammum $I N$, ex ratione $A B$, ad $I E$, & ex ratione $B E$, ad $E N$. Cum autem fit ut $A B$, quadratum, ad $I E$, quadratum, ita $B C$, ad $C E$, si inter $B C$, & $C E$ sumatur media proportionalis $C V$, item inter $E C$, & $N C$, media proportionalis $Y C$, erunt continuè proportionales rectæ $B C$, $V C$, $E C$, $Y C$, $N C$, & ut $B C$, ad $E C$, ita erit $B C$, quadratum ad $V C$, quadratum, sed ut $B C$, ad $E C$; ita quadratum $A B$, ad quadratum $E I$, Ergo ut $A B$, quadratum ad $E I$, quadratum, ita erit $B C$, quadratum ad $V C$, quadratum: & ut $A B$, ad $I E$, ita erit $B C$, ad $V C$, ratio igitur parallelogrammi $A E$, ad parallelogrammum $I N$, componetur ex ratione $B C$, ad $V C$, sive $V C$, ad $C E$, sive $E C$ ad $Y C$; & ex ratione $B E$, ad $E V$, sive ex superius demonstratis $B C$, ad $C E$, Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, $B C$, nempe ad $C E$, & $C E$, ad $C Y$, est eadem quæ ratio $B C$, ad $C Y$, igitur parallelogrammum $A E$, est ad parallelogrammum $I N$, ut $B C$, ad $Y C$, ideoque ex theoremate methodi constitutivo, parallelogrammum $A E$, crit ad figuram $I R C H E$, ut recta $B Y$, ad rectam $B C$, ideoque ut idem parallelogrammum $A E$, ad totam figuram $A I G R C B$, ita recta $B Y$, ad totam diametrum $B C$, ut autem recta $B Y$, ad totam diametrum $B C$, ita sumptâ communi latitudine $A B$, parallelogrammum sub $A B$ in $B Y$, ad parallelogrammum sub $A B$, in $B C$, sive parallelogrammum $B D$, ductâ $A D$, diametro parallelâ occurrente tangenti $C D$, in D , ergo ut parallelogrammum $A E$, ad totam figuram femiparabolicam $A R C B$; ita parallelogrammum sub $A B$, in $B Y$, ad parallelogrammum sub $A B$, in $B C$; & vicissim ut parallelogrammum $A E$, ad parallelogrammum sub $A B$, in $B Y$; ita figura ad parallelogrammum $B D$, ut autem parallelogrammum $A E$, ad parallelogrammum sub $A B$, in $B Y$, ita propter communem latitudinem recta $B E$, ad $B Y$, ergo ut $B E$, ad $B Y$, ita figura ad parallelogrammum; & convertendo ut $B Y$, ad $B E$, ita parallelogrammum $B D$, ad figuram $A R O B$; est autem $B Y$, ad $B E$, propter adæqualitatem & sectiones minutissimas, quæ rectas $B V$, $V E$, $E Y$, intervalla proportionalium representates, ferè inter se supponit æquales, ut 3. ad

2. Ergo parallelogrammum BD , ad figuram est ut 3. ad 2. quæ ratio congruit $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\acute{\alpha}$ paraboles Archimedæo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit usurpata; Methodum autem variare, & diversam ab Archimede viam sectari necesse habuimus, quia sterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehensam iri, insistendo vestigiis tanti viri non dubitamus. Demonstratio autem & regulæ generales ex nostra methodo ferè in omnibus omnino parabolis statim patebunt.

Sit enim, ut nullus amplius supersit dubitandi locus parabole ea de qua mentionem fecit dissertatio nostra de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, curva



$AICB$, cujus basis AB , diameter BC , & sit ut cubus applicatæ AB , ad cubum applicatæ IE , ita quadratum rectæ BC , ad quadratum rectæ EC , & reliqua ponantur ut supra; series nempe proportionalium rectarum BC , EC , NC , MC , &c. item series proportionalium parallelogrammorum AE , IN , OM , &c. in infinitum. Inter BC , & EC , sumantur duæ mediæ proportionales VC , RC , item inter EC , & CN , sumantur etiam duæ mediæ proportionales SC , TC , constat ex constructione, cum ratio BC , ad EC , sit eadem rationi EC , ad NC , fore quoque continuè proportionales rectas BC , VC , RC , EC , SC , TC , NC . Est autem ut AB , cubus ad cubum IE , ita BC , quadratum ad EC , quadratum, sive recta BC , ad rectam NC . Cum autem sint, ut supra probavimus, septem continuè proportionales, BC , VC , RC , EC , SC , TC , NC , ergo prima, tertia, quinta & septima erunt etiam continuè proportionales, ideoque erit BC , ad RC , ut RC ad SC , & ut SC , ad NC . Ut igitur prima BC , ad quartam NC , ita cubus primæ BC , ad cubum secundæ RC , sed ut BC , ad NC , ita probavimus esse cubum AB , ad cubum IE . Ergo ut cubus AB , ad cubum IE , ita cubus BC , ad cubum RC ; ideoque ut AB , ad IE , ita BC , ad RC . Cum igitur ratio parallelogrammi AE , ad parallelogrammum IN , componatur ex ratione AB , ad IE , & ex ratione BE , ad EN , sive BC , ad EC , ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione BC , ad RC , & BC , ad EC . Ut autem BC , prima proportionalium ad EC , quartam, ita RC , tertia ad TC , sextam. Ergo parallelogrammi AE , ad parallelogrammum IN , ratio componitur ex ratione BC , ad RC , & RC , ad TC : hoc est parallelogrammum AE , est ad parallelogrammum IN , ut BC , ad TC , parallelogrammum igitur AE , ex prædemonstratis, est ad figuram $IGCE$, ut recta BT , ad TC ; ideoque ut parallelogrammum AE , ad totam figuram $AICB$, ita recta BT , ad rectam BC , sive sumpta communi latitudine AB , ita parallelogrammum sub AB , in BT , ad parallelogrammum sub AB , in BC . Et vicissim & convertendo, ut parallelogrammum BD , est ad figuram $AICB$, ut parallelogrammum sub AB , in BT , ad parallelogrammum sub AB , in BE , sive propter communem latitudinem AB , ut recta BT , ad rectam BE , recta autem BT , continet quinque intervalla TS , SE , ER , RV , VB , quæ inter se propter nostram methodum logarithmicam censentur æqualia. Recta autem BE , continet tria ex iis intervallis, nempe

nempe ER, RV, VB. Ergo parallelogrammum BD, est ad totam figuram in hoc casu ut 5. ad 3.

Canon verò universalis inde nullo negotio elicitur. Patet nempe fore semper parallelogrammum BD. ad figuram AICB, ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ & Diametri ad exponentem potestatis applicatæ, ut in hoc exemplo videre est, in quo potestas applicatæ AB, est cubus, cujus exponens B. potestas autem diametri est quadratum, cujus exponens 3. Ergo debet esse, ut jam demonstravimus, & perpetuò constabit, ut summa 3. & 2. hoc est 5. ad 3. exponentem applicatæ.

In hyperbolis autem canon non minori facilitate invenietur universalis. Erit enim semper in quacunque hyperbola, si recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG, ad figuram in infinitum protensam, RGED, ut differentia exponentium potestatum applicatæ & diametri ad exponentem potestatis applicatæ. Sit enim, exempli gratiâ, ut cubus HA ad cubum GA, ita quadratum GE, ad quadratum HI, differentia exponentium cubi & quadrati hæc est. 3. & 2. erit 1. Exponens autem quantitatis applicatæ, hoc est quadrati, est 2. Ergo in hoc casu parallelogrammum erit ad figuram, ut 1. ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis, & tangentes, tam hyperbolarum, quàm parabolarum, inventio dudum ex nostra methodo de maximis & minimis derivata, Geometris recentioribus innotuit, hoc est ante viginti, plus minus annos. Quod celebriores totius Galliæ Mathematici non gravabuntur fortasse exteris indicare, ne hac de re in posterum dubitent.

Ex supradictis mirum, quantam opus tetragonismicum consequatur accessionem. Infinitæ enim exinde figuræ curvis contentæ de quibus nihil adhuc, nec veteribus, nec novis Geometris in mentem venit, facillimam sortiuntur quadraturam. Quod in quasdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva, cujus proprietas det æquationem sequentem B, quad. — A, quad, æquale E, quad. (apparet autem statim hanc curvam esse circulum.) Certum est potestatem ignotam E, quad. posse reduci per applicationem seu parabolismum ad latus. Possumus enim supponere E, quad. æquari B, in V, cum sit liberum quantitatem ignotam V, in notam B, ductam æquare quadrato E, etiam ignotæ. Hoc posito B, quad. A, — quad. æquabitur B, in V. Homogeneum autem B in V, ex tot quantitibus homogeneis componi potest, quot sunt in parte æquationis correlativâ, jisdemque signis hujusmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur B in V, æquari B in IB, in Y. Ex more enim Vietæo, vocales semper pro quantitibus ignotis sumimus. Ergo B, quad. — A, quad. æquatur B in I, — B in Y, æquentur singula membra partis unius singulis membris partis alterius. Sit nempe B, quad. æquale B, in I, Ergò dabitur I, æqualis B, æquetur deinde — AG, — B, in Y, hoc est A quad. B in Y, erit extremum punctum rectæ Y ad parabolam primariam. Omnia igitur in hoc casu ad quadratum reduci possunt: ideoque si omnia E, quad. ad rectam lineam datam applices, fiet solidum rectilineum datum & cognitum.

Proponatur deinde curva, cujus, hæc sit æquatio A cub. + B, in A, quad. æquale E, cub. E, cub. applicetur ad planum datum, & sit, verbi gratiâ, æquale B, quad. in V. Quia autem recta V, ex pluribus quantitibus ignotis componi potest. Sit A, cub. + B in A, quad. æquale B, quad. in I + B. quad. in Y. æquentur singula inter se membra, hoc est A cub. æquetur B. quad. in I, orietur inde parabole sub cubo & latere. æquetur deinde B in A, quad. secundo membro, B, quad. in Y, orietur inde parabole sub quad. & latere, hoc est primaria, quadrantur autem singulæ ex his parabolis. Ergo aggregatum E, cuborum ad rectam datam applicatorum producit plano-planum quantitibus ejusdem gradus rectilineis commodè æquandum.

Si sint plura in æquationibus membra, imò & sub plerisque utriusque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eandem ut plurimum methodum reductionum legitimarum ope poterunt aptari.

Ex his patet, si in priori æquatione in qua B, quad. — A quad. æquavimus E, quad

loco ipsius E, quad. ponamus B in V, posse nos aggregatum omnium V, ad rectam datam applicatarum considerare tanquam planum, & quadrare. Omnes enim V, nihil aliud sunt quàm omnia E quad. divisa per B rectam datam. Item in secunda æquatione omnes V, nihil aliud sunt quàm omnes E cubi divisi per B, quadratum datum. Igitur tam in prima quàm in secunda figura omnes V, faciunt figuram æqualem spatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per synæresim, & expeditur, ut patet, per parabolas.

Sed non minus quadrationum ferax est opus per diæresim quod per hyperbolas, aut solas, aut parabolis mixtas, commodè pariter expeditur.

Proponatur, si placet, curva ab æquatione sequenti oriunda.

$$\underline{B, \text{ cub. cub. } + B Q C \text{ in } A, + A \text{ cub. cub.}} \quad \infty E \text{ quad.}$$

A quad. quadr.

Ex jam suppositis E quad. potest fingi æquale B in V, sive ut tria hinc & inde membra sint in utraque parte æquationis. B in V, potest æquari B in O, + B in I, + B in Y

Quo peracto.

$$\underline{B \text{ cub. cub. } + B Q V \text{ cub. in } A + A \text{ cub. cub.}} \quad \text{æquabitur.}$$

A quad. quadr.

B in O. | B in I + B in Y. Et æquando singula membra singulis B cub. cub. æquabitur B in O.

A Q Q.

Et omnibus in A, qu. qu. ductis B, cub. cub. æquabitur A qu. qu. in B in O. Et omnibus abs B divisis B. quad. cub. æquabitur A qu. qua. in O. quæ est æquatio ad unam ex hyperbolicis, ut patet. Æquationes enim hyperbolicarum constitutivæ continent ex una parte quantitatem datam; ex aliâ verò id quod fit sub potestatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat B Q C in A. Sive B, qu. cub. æquale B in I.

$$\underline{A \text{ qu. qu.}} \quad \underline{A \text{ cub.}}$$

Et omnibus in A cub. ductis & abs B divisis, fit B qu. qu. æquale A cub. in I, quæ est æquatio alterius hyperbolæ à priori diversæ. Denique tertium membrum est A cub. cub.

A qua. qua.

Hoc est A, qu. æquale B, in Y, quæ est æquatio ad parabolam.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes V, ad rectam datam applicatas æquari spatio rectilineo dato. Summa enim duarum hyperbolicarum quadrationi obnoxiarum, & unius parabolæ dant spatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus singula membra numeratoris separatim denominatori applicemus, ut jam factum est. Eodem enim res recidit, quò si integrum numeratorem ex tribus membris compositum eidem denominatori semel applicemus. Ita enim singula æquationis membra singulis homogenei correlatis possunt commodè comparari.

Proponatur etiam B, qu. cub. in A, — B, cub. cub. Æquari E cub.

A cub.

Fingatur E cub. æquari B, qu. in V, sive propter duo membra homogenei correlati B, qua. in I, + B, qu. in Y. Fiet B qu. cub. in A, sive B qu. cu. æquale B qu. in I.

A cub.

A Q.

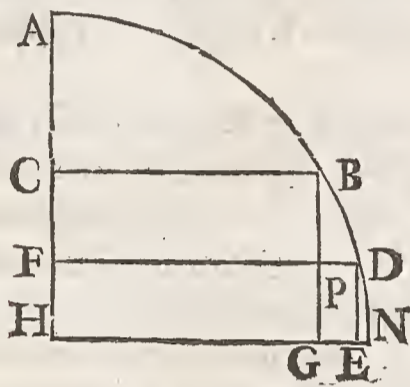
& omnibus in A qu. ductis, & abs B , qu. divisus, fiet B , cub. æquale A , qu. in I . quæ est æquatio ad unam de hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde secundam homogenei membrum B , cub. æquari B qu. in Y .

Acub.

Igitur omnibus in A , cub. ductis & abs, B , qu. divisus fiet B , qu. qu. æquale A , cub. in Y , quæ est æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiiis constitutiva. Datur igitur recurrendo ad primam æquationem in rectilineis summa omnium E , cuborum in hac specie ad certam rectam datam applicatorum.

Sed & ulterius progredi, & opus tetragonismicum promovere nihil vetat.



Sit in quartâ figurâ curva quælibet, $ABDN$, cujus basis HN , diameter HA , applicatæ ad diametrum, CB , FD , & applicatæ ad basim, BG , DE , & decrescant semper applicatæ à base ad verticem, ut hic, HN , est major FD , & FD , major est CB , & sic semper. Figura composita ex quadratis HN , FD , CB , ad rectam AH , applicatis, hoc est solidum sub CB , quadrato in CA , & sub FD , quadrato in FC , & sub NH , quadrato in HF , æqualis est semper figuræ sub rectangulis BG , in GH , DE , in EH , bis sumptis, & ad basim HN , applicatis; hoc est solido sub BG , in GH , bis in GH , & sub DE , in EH , bis in EG , &c. utrimque in infinitum. In reliquis autem in infinitum præstantibus, eadem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum, ad homogenea ad basim. Quæ observatio curvarum infinitarum hæctenus ignoratum, detegit quadrationem.

Omnes enim cubi HN , FD , CB , ad rectam AH , similiter applicati, æquales sunt aggregato productorum ex BG , in GH , quadratum, & ex DE , in EH , quadratum ad rectam HN , similiter ut supra applicatorum, & ter sumptorum; hoc est planoplanum sub CB , cubo in CA , & sub DF , cubo in FG , & sub HN , cubo in HF , æquatur summæ planoplanorum ex BG , in GH , quadratum in HG , & ex DE , in EH , quadratum in EG , ter sumptæ.

Aggregatum verò quadrato quadratorum HN , FD , CB , ad rectam AH , applicatorum æquatur quadruplo summæ plano planorum sub BG , in GH , cubum, & sub DE , in EH , cubum ad rectam HN , similiter ut supra applicatorum. Inde emanant infinitæ, ut statum patebit, quadraturæ.

Esto enim, si placet, curva illa $ABDN$, ejus naturæ, ut data base HN , & diametro HA , diameter data AH , vocetur in terminis analyticis B . Ipsa verò HN , basis data vocetur D . Quælibet applicato FD , vocetur E , & quælibet HF , vocetur A ; & sit, verbi gratiâ, æquatio curvæ constitutiva B , quad. — A qu. æquale E , quad. (quod in circulo ita se habet:) Cum ergo ex prædicto theoremate universali omnia E , quadrata, ad rectam B , applicata ad basim HN , sive ad D , applicatis, sint æqualia omnibus productis ex HG , in GB , sint autem omnia E , quadrata æqualia ad B , applicata spatio rectilineo curvo, ut superius probatum est. Ergo omnia producta ex HG , in GB , bis sumpta, & ad basim D , applicata, continent spatium rectilineum datum. Ergo sumendo dimidium, omnia producta ex HG , in GB , ad basim D , applicata,

erunt æqualia spatio rectilineo dato. Ut autem facillima, & nullis asymmetriis involuta fiat translatio prioris curvæ ad novam ; ita constanti artificio, quæ est nostra methodus, operari debemus.

Sit quodlibet ex productis ad basim applicandis, HE , in ED , cum igitur FD , sive HE , ipsi parallela vocetur in analysi E , & FH , sive DE , ipsi parallela vocetur A . Ergo productum sub HE , in ED , vocabitur E in A . Ponatur illud productum E in A , quod sub duabus ignotis & indefinitis rectis comprehenditur æquari B in V , sive producto ex B , data in V , ignotam, & intelligatur EP , in directum ipsi DE , posita æquari V ; Ergo B in V , æquabitur A . Cum ergò B , qu. — A , quad. æquetur ex proprie-

tate specifica prioris curvæ ipsi E , qu. Ergo subrogando in locum A , ipsius novum valorem B , in V , fiet B , quad. in E , qu. — B , quad. in V , quad. æquale E , quad.

quad. sive per antithesim B , quad. in E , qu. — E , qu. qu. æquale B , qu. in V , quad. quæ est æquatio novæ $HOPN$, curvæ ex priori oriundæ constitutiva, in qua cum omnia producta ex B , in V , dentur, ut jam probatum est, si omnia ad B , applicentur dabitur summa omnium V , ad basim applicatarum : hoc est dabitur planum $HOPN$, rectilineis ; ideoque ipsius quadratura.

Sit, secundi exempli gratiâ, æquatio prioris curvæ constitutiva B , in A , quad. — A cub. æquale E , cub. summa omnium E , cuborum ad diametrum B , applicatorum dabitur : ideoque summa omnium productorum ex quadratis HE , in ED , ad basim applicatorum. Productum autem ex HE , quadrato in ED , fit in terminis analyticis E , quad. in A , quod fingatur æquari B , quad. in V , & recta. EP , ut supra, æqualis V , Ergò B , quad. in V , æquabitur A .

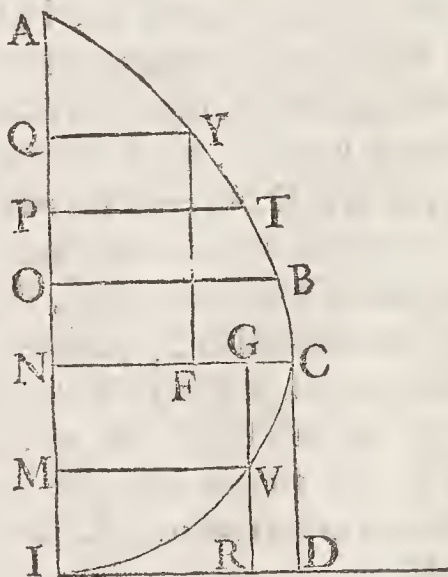
E quad.

Si igitur in locum A , subrogemus jam agnitum illius valorem B , quad. in V .

E quad.

Et omnia juxta analyseos præcepta sequamur, fiet B , quad. cub. in V . quad. in E . quad. — E , cub. cub. cub. æquale B , cub. cub. in V , cub. quæ est æquatio novæ $HOPN$, curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in quâ cum omnia producta B , qu. in V , ad basim D , applicata dentur, omnibus per B , quadratum datum divisus, dabitur summa omnium V , ad basim D , applicatarum ideoque quadratura figuræ $HOPN$, & est generalis ad omnes omnino casus extendenda in infinitum methodus.

Notandum porro, & accuratè advertendum in translationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum versùs basim decrescunt, aliam omnino viam analytici incundam, à præcedenti diversam.



Sit enim in quinta figura prior curva $IVCBTYA$, cujus diameter AI , applicatae MV , NC , OB , PT , QY , & ejus curvæ ea sit natura, ut applicatae versus basim MV , semper decrescant, donec ad basim perveniant, ita ut MV , sit minor quàm NC . Rursum autem ita curva versus A , per tramitem $CBYA$, inflectatur, ut CN , sit major quàm BO , BO , major quàm PT , PT , major quàm QY , &c. ita ut omnium applicatarum maxima sit CN , si in hoc casu quæramus translationem quadratorum MV , NC , ad basim, ea non comparabimus productis sub IR , in RV , ut supra: quia jam ex theoremate generali suppositum est omnia quadrata MV , NC , æquari productis sub VG , in GN , cum CN , maxima applicatarum possit & debeat considerari ut basis respectu curvæ, cujus vertex I . Quadrata igitur MI , NC , in curva quarum applicatae decrescunt versus basim, comparabuntur in hoc casu productis GV , in GN , hoc est, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, si MI , vel RV , vocetur A , & ipsa MV , sive RI , vocetur E , ipsaque CD , sive GR , quæ ductæ per terminum maximæ applicatarum, ipsi diametro parallelæ, est æqualis: ideoque facillè ex nostris methodis inveniendæ; rectæ datæ Z , æqualis supponatur, fiet productum ex GV , in GN , æquale producto ex Z , in E , — A in E : ideoque omnia quadrata MV , NC , usque ad maximam applicatam comparabuntur productis Z , in E — A in E , ad basim ID , applicandis. Reliqua verò quadrata CN , BO , PT , comparabuntur productis ex YE , in FN , quæ in terminis analyticis æquivalent A in E , — Z in E . Quibus ita stabilitis facillimè ex priorè curva nova versus basim derivabitur; idemque in aliis omnino applicatarum potestatibus erit observandum.

Ut autem pateat novas ex nostra hac methodo emergere quadraturas, de quibus nondum recentiorum quisquam est aliquid subodoratus.

Proponatur præcedens curva, cujus æquatio B , quad. cub. in $A - B$, cub. cub. A cub. æquale E , cubo.

Dantur omnes E , cubi in rectilineis, ut jam probatum est. Quibus ad basim translationis, fiet ex superiori methodo B , qu. in V , æquale A , & omnibus secundum artem E qu.

novò ipsius A , valore accommodatis, evadet tandem nova æquatio quæ dabit curvam ex parte basis, cujus æquatio dabit E , cub. + V , cub. æquale B in E , in V , quæ est curva Schotenii, cujus constructionem tradit in sectione 25. miscellanearum, pag. 493. Figura itaque curva $AKOGDCH$, quæ apud illum authorem delineatur ex superioribus præceptis quadrationem suam commodè nanciscetur.

Notandum autem de curvis in quibus aggregatum potestatum applicatarum datur, formari non solum curvas ad basim quadrationi obnoxias, sed etiam alias curvas ad diametrum facillè quadrandas. Si enim in 4. figura supponatur æquatio curvæ constitutiva, ut superius diximus B , quad. — A , qu. æquale E , quad. non solum ex ea derivabitur nova curva ad basim, cujus æquatio est B , qu. in E , qu. — E qu. quad. æquale B , qu. in V , quad. Sed etiam nova curva ad diametrum æquando potestatem applicatæ quæ est E , qu. producto B , in V . Dabuntur enim omnia producta B , in V , ad diametrum applicata. Et omnibus per B , divisis, dabuntur omnes V , diametro applicatæ; ideoque quadraturæ curvæ novæ ex priorè versus diametrum oriundæ, cujus æquatio erit B , qu. — A qu. æquale B in V . Unde statim apparet novam illam curvam versus diametrum esse parabolam. Hujusmodi autem transmutationum beneficio non solum ex prioribus curvis oriuntur novæ; sed itur nullo negotio à parabolis ad hyperbolas, & ab hyperbolis ad parabolam, ut experientiâ constabit.

Sicut autem à curvis in quibus dantur potestates applicatarum, fit præcedentis ope analyseos translatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur; Ita de curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facillè ad curvas, in quibus potestates applicatarum dantur. Cujus rei exemplum esto curva, cujus æquatio B , qui

in E, qu. — E, qu. qu. æquale B, qu. in V, qu. in hac enim æquatione, ut jam probatum est, dantur omnes V, Ponatur V, æqualis esse A, in E, & subrogando in locum

ipsius V, novum ipsi assignatum valorem, $\frac{A \text{ in } E}{B}$, fiet B, qu. in E, qu. — E, quad.

quad. æquale A qu. in E, qu. & omnibus ab E, qu. divis, remanebit B, qu. — E, qu. æquale A, qu. sive B, qu. — A, qu. æquale E, qu. Dabuntur igitur in hac novâ curvâ, quam apparet esse circulum, omnia E, quadrata.

Quod si ex primâ curvâ in quâ dantur latera applicatarum, quæratu nova in quâ dentur cubi applicatarum, eadem methodo utendum, modò potestates ignotarum conditionarias usurpemus. Proponatur enim curva quam superius ex alia deduximus, & sit illius æquatio B, qu. cub. in V, quad. in E, qu. — E, cub. cub. cub. æquale B, cub. cub. in V, cub.

Probatum est in illa dari aggregatum omnium V; hoc est latera applicatarum.

Ut itaque ex eâ nova curvâ derivetur in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur V, æquari $\frac{E}{B \text{ qu.}}$ in A, & in locum V, substituatur novus iste quem ipsi

assignavimus valor, fiet tandem operando secundum præcepta artis, æquatio in B, in A, qu. — A cub. & E, cub. quæ dabit curvam in qua omnes E, cub. cubos applicatarum repræsentantes dabuntur.

Ex hac autem methodo non solum dantur & inveniuntur quadrations infinitæ, nondum Geometris cognitæ, sed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadraturæ supponendo simpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperbolæ, ut aliarum expediuntur. Exempli gratiâ, in æquatione circuli, in qua B, qu. — A, qu. æquatur E, qu. dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum potestates, quarum exponentes signantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadrato quadrata, omnes cubo cubi, &c. Sed potestates applicatarum, quarum exponentes signantur numero impari, ut omnes E, cubi, omnes E, quad. cubi, dantur tantum in rectilineis supponendo ipsam circuli quadraturam, quod non est operosum demonstrare, & in praxim redigere, tam quam corollarium methodi præcedentes.

Plerumque autem usuenit ut iterandæ, vel bis, vel etiam sæpius sint operationes ad inquirendam curvæ propositæ dimensionem.

Proponatur, exempli gratiâ, curva, ejus æquatio sequens speciem determinet B, cub. æqualis A, quad. in E, + B, qua in E.

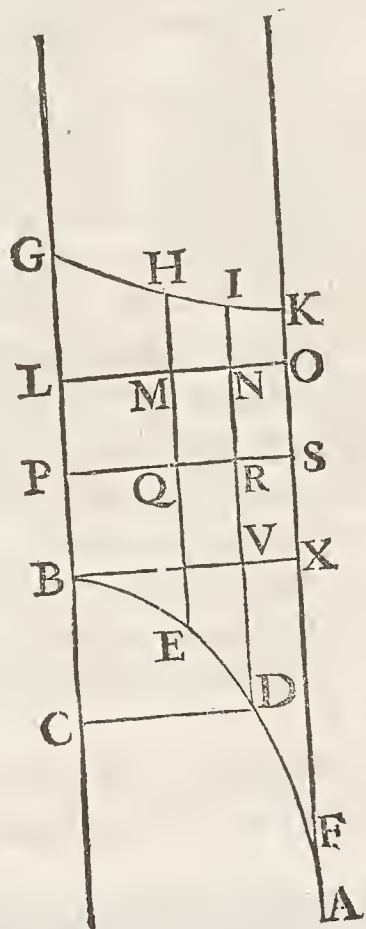
Si dantur omnes E, ergo dantur omnia sub rectâ datâ, (B, videlicet) in E, rectangula Rectangulum B, in E, invertendo superiorem, de qua egimus in principio dissertationis methodum, æquetur quadrato O, qu. Ergo $\frac{O}{B}$, quad. æquabitur E. Et

substituendo in locum E, novum hunc ipsi assignatum valorem, fiet B, qu. qu. æquale A, Qu. in O, qu. + B, qu. in O, qu. Et hæc sit prima operatio, quæ est inversa ejus quam initio hujus dissertationis præmisimus, & quæ novam curvam exprimit, in quâ inquirendum restat an dentur omnia O, quad. Recurrendum igitur ad secundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquirimus.

Ponatur $\frac{B}{O}$, in V, ex superiore quam secundo loco exhibuimus methodo æquari A,

& substituendo in locum A, ipsi jam assignatum ex nostra methodo valorem fiet B, q, qu. — B, qu. in O, qu. æquale B, qu. in V, quad. Et omnibus per B, quad. divis evadet tandem B, qu. — O, qu. æquale A, quad. quæ æquatio dat circulum. Et in eâ omnes V, dantur, supponendo quadraturam circuli. Recurrendo igitur ad priorem curvam, in quâ B, cub. ponitur æquari A, qu. in E, + B, qu. in E, patet spatium ab ea curva oriundum per quadraturam circuli posse quadrari, id quæ per duas curvas à priore diversas analysis nostra breviter & facillè expedit.

Hæc verò omnia, & ad inventionem rectarum curvis æqualium, & ad pleraque alia non satis hæctenus indagata problemata inservire statim experiendò ἀγγίϋς analysta deprehendet.



Sit in sextâ figura parabolæ primaria A, B, C, cujus axis CB, applicata CD, æqualis axi CB, & recto lateri BV, fiantque BP, PL, LG, singulæ æquales axi CB, & ipsi sic directum sumatur in curva quodvis punctum, ut F, & datis infinitis BX, PS, LO, ipsi CD, parallelis, ducatur FXSOK, parallela axi occurrens rectis PS, LO, in punctis S, & O, & fiat ut summa rectarum FX, XS, sive ut tota FS, ad SO, ita SO, ad OK. Et sumptis similiter punctis DE, fiat ut DR, ad RN, ita RN, ad NI, & ut EQ, ad QM, ita QM, ad MH. Et intelligatur curva infinita per puncta GHIK, &c. incedens, cujus asymptotos erit recta infinita LO. Curva hæc GHIK est ea cujus species à superiori æquatione determinatur, in qua B, cub. æquatur A, qu. in E, + B, quad. in E, Aio itaque ex jam traditâ operationum analytica iteratione, spatium KIHGLMNO, in infinitum versùs puncta KO, extendendum, æquale esse circulo, cujus diameter est axis BC, Hanc verò quæstionem ab erudito Geometra nobis propositam, ita statim expedivimus.

Eâdem methodo spatium à Dioclaea comprehensum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus.

Sed elegans inprimis operationum iteratio evadit, cum ab altioribus applicatarum potestatibus, ad depressiores, vel contra à depressioribus ad altiores analysis ipsa transcurrit; cui methodo præsertim debeat inquisitio summæ applicatarum in quacumque curva proposita, & multa alia problemata tetragonismica. Proponatur, verbi gratiâ, curva, cujus æquatio B, qu. - A, qu. æquale E, qu. quam statim apparet esse circulum. Quæritur summa cuborum applicatarum, hoc est summa E, cuborum. Si dantur omnes E, cubi. Ergo per præcedentes, secundum potestatis conditionem, methodos, ex ea curva potest alia ad basim derivari, in quâ dabitur summa applicatarum. Ponatur igitur ex methodo B, qu. in O, æquari A. Ergo substituendo in lo-

cum A, jam assignatum ipsi valorem, fiet ex methodo B, qu. in E, qu. qu. - E, cub.

cub. æquale B, qu. qu. in O, qu. quæ est æquatio curvæ, in qua omnes O, dantur ex suppositione quam fecimus in primâ curvâ, dari omnes E, cubos. Cum igitur in hac nova curva omnes O, dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quærantur quadrata applicatarum, non verò cubi, ut in priore curvâ jam suppositum est. Fingatur igitur ex nostra quæ in quadratis, ut jam supra diximus, usurpatur methodo E, in V, æqua-

ri O. Ergo B, qu. in E, qu. qu. — E, cub. cub. æquabitur B, qu. in E, qu. in V, quad. Et omnibus abs E, qu. divisus fiet B, qu. in E, q. — E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. Et in hac curva omnes E, quadrati dantur. Si igitur ex hac curva quæramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, si placet, E, quad. æquale B, in Y. Ergo in ultima hac æquatione B, in Y — Y quad. æquabitur V, qu. Et cum in superiore dentur omnes E, qu. dabuntur in ista omnia rectangula B, in Y, ideoque omnes Y. Cum ergo omnes Y, dentur in hac ultima curva, quæ est circulus ut patet. Igitur eâ tantum conditione dantur, si supponas dari circuli quadraturam. Regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua definit nostra analysis, curva, ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, supponendo circuli quadraturam. Idem de quadratocubis, de quadratoquadratocubis, & cæteris in infinitum gradus imparis potestatibus demonstrare est in promptu. Sed multiplicatur numerus curvarum, prout altior est, de quâ inquirimus, potestas. Nec est difficilis ab analysi ad synthefim, & ad verum quadrandæ figuræ calculum regressus.

Sæpius autem contingit, & miraculi instar est per plurimas numero curvas incedendum & expatiandum esse analystæ, ut ad simplicem æquationis localis propositæ dimensionem perveniatur.

Proponatur, exempli causâ $\frac{B^7}{A^6}$ in $A - B^8$ æquari E, qu.

Cum supponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ; dabuntur omnes A. Ergo omnes B, in A, quæ si æques quadrato ignoto O, qu. dabuntur omnes O, qu. & A, æquabitur $\frac{Oq}{B}$ ideoque fiet æqu. inter $\frac{B^{12} \text{ in } O \text{ qu.} - B^{14}}{O^{12}}$ & E, q. ex hac novâ curvâ, aliâ methodo, de quâ toties egimus, deducetur tertia, in quâ quia dantur omnes O, quadrati, ponatur $\frac{B \text{ in } V}{O}$ æquari E; ergò fiet æquatio inter $\frac{B^{10} \text{ in } Oq - B^{12}}{O^{10}}$ Et V, quadr. unde deducetur quarta curva, in qua dabuntur omnes O, ideoque omnes V. Si dantur omnes V. Ergo ex prima methodo dantur omnia sub B, in V, rectangula. fit B, in V, æquale Y, quadrato: ideoque $\frac{Y \text{ quad.}}{B}$ æquabitur V,

fiet æquatio inter $\frac{B^{12} \text{ in } O \text{ qu.} - B^{14}}{O^{10}}$ & $\frac{Y^4}{B}$ unde orietur quinta curva in quâ dabuntur omnes Y, quadr. Ex illo solita methodo deducatur alia curva, & fiat $\frac{B \text{ in } I}{Y}$ æqualis O.

Omnibus secundum præcepta analyseos peractis fiet B⁴ in Y⁴ in I, quad. — B⁴ in Y⁶ æquale I¹⁰ unde orietur sexta curva, in quâ dabuntur omnes I, ideoque omnes I. Ex eâ contrariâ quam jam sæpius inculcavimus methodo, quærat alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, & fit $\frac{I \text{ in } A}{B}$ æqualis Y, (nihil enim vetat defectu vocalium, ad priores supra usurpatas recurrere,) fiet B, qu. in A⁴ — A⁶ æquale

le B, qu. in I^4 , unde orietur curva septima, in qua omnia I, quadrata dabuntur. Reducantur ad latera, notâ & sæpius iteratâ superiùs methodo, & fiat I, quadratum æquale B, in E. Ergò omnia B, in E, dabuntur. Et inde deducetur octava curva, in qua B qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B^4 in E qu. in eâque dabuntur omnes E; ideoque omnes A. Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, & ex methodo ponatur A in O, æquari E. Ergo B. qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B, qu. in

B

A qu. in O qu. Et omnibus abs A qu. divisis, fiet æquario inter B qu. in A q. — A^4 . Et B q. in O q. in qua omnia A, qu. dabuntur, Et erit nona curva ab ea æquatione determinata. Cum igitur in eâ omnia A quadrata dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, & sit A qu. æquale B in V, fiet B in $V - V$ quad. æquale O, qu. quæ ultima æqualitas dabit decimam curvam, in qua omnes V dabuntur. At hæc ultima curva, est circulus, ut patet, & in ea omnes V, non dantur, nisi suppositâ circuli quadraturâ. Ergo recurrendo ad primam curvæ propositæ constitutionem, dabitur illius quadratura, supponendo ipsam ultimæ istius curvæ, sive circuli quadraturam. Beneficio igitur decem curvarum inter se diversarum ad notitiam prioris pervenimus.





NOVVS SECVNDARVM
ET VLTERRIORIS ORDINIS RADICVM
IN ANALYTICIS USUS.

REDUCTIO secundarum, & ulterioris ordinis radicum, ad primas, quæ maximi est in Algebraicis momenti, unicam pro fundamento agnoscit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progressus ipse quæstionis ostendit.

Proponatur A , cubus $+ E$, cubò æquari Z , solido. Item B , in A , $+ E q.$ $+ D$, in E , æquari N , quad. ut secunda radix devolvatur ad primam. Hæc sunt præcepta.

Quæcumque à secunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem transeunto, ut in superiori exemplo, cum $A c.$ $+ E c.$ æquetur Z , sol. Ergò Z , $S.$ $- A c.$ æquabitur $E c.$

Similiter cum B in A , $+ E q.$ $+ D$, in, æquetur $N q.$ Ergò $N q.$ $- B$, in A , æquabitur $E q.$ $+ D$, in E .

In utraque igitur æquatione homogenea ab E , sive ab secunda radice adfecta, unam æquationis partem constituunt.

Si igitur duplicata ejusmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit ut
 $Z, S, - A c.$ ad $E c.$

Ita $N q, - B$, in A , ad $E q, + D$, in E .

Cum itaque factum sub extremis comparabitur factò sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea divisionem admittent per E , sive per secundam radicem, ut patet: quia secundus & quartus terminus ab E , adficientur.

Erit nempe $+ Z S$, in $E q$, $- A c$, in $E q$, $+ Z S$, in D in E , $- A c$, in D in E , æquale $N q$, in $E c$, $- B$ in A , in $E c$.

Omnino dividantur toties per E , donec aliquod ex homogeneis adfectione sub E , omnis liberetur.

Erit $Z S$, in E , $- A c$, in E , $+ Z S$, in D , $- A c$, in D .
æquale $N q$, in $E q$, $- B$ in A , in $E q$.

Quo peracto, nova hæc æquatio, uno ad minus gradu depressior erit (quad. secundam radicem) quàm elatior ex duabus primùm propositis.

Patet nempe elatiorem ex duabus primùm propositis affici sub cubo E , Istius verò nullam abs E , adfectionem excedere $E q$.

Nec tamen sic quiescendum, sed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio secundæ radice fiat tantùm sub latere, ut à symetria omnis evanescat.

Præparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præscriptum, & homogenea sub E , quomodocumque affecta unam æquationis partem faciant.

Erit itaque $Z S$, in $D - A c$ in D , æquale $N q$, in $E q$, $- B$, in A , in $E q$, $- Z S$, in $E + A c$, in E .

Sed ex duabus primùm propositis, quæ depressior est, exhibet æquationem sequentem ut diximus.

$N q$, $- B$, in A .

æquale $E q$, $+ D$, in E .

Revocetur rursùm ad analogiam duplicata ista æqualitas.

Erit itaque

$Z S$, in D , $- A c$, in D , ad

$N q$, in $E q$, $- B$, in A , in $E q$, $- Z S$, in $E + A c$, in E .

ut $N q$, $- B$, in A , ad

$E q$; $+ D$, in E .

Cum itaque factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, tamquam ipsi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E , ut supra demonstratum est. Erit nempe

$Z S$, in D , in $E q$, $+ Z S$, in $D q$, in E , $- A c$, in D , in $E q$, $- A c$, in $D q$, in E .

æquale

$N q q$, in $E q$, $- N q$, $-$ in B , in A , in $E q$, $- N q$, in $Z S$, in $E + N q$, in $A c$, in E ,

$- B$, in A , in $N q$, in $E q$, $+ B q$, in $A q$, in $E q$, $+ B$, in $Z S$, in A , in E , $- B$, in

$A q q$, in E .

Et omnibus abs E , divisis, fiet tandem $Z S$, in D , in E , $+ Z S$, in $D q$, $- A c$, in D , in $E - A c$ in $D q$.

æquale

$N q q$, in $E - N q$, in B , in $A -$ in $E - N q$, in $Z S$, $+ N q$, in $A c - B$, in A , in

$N q$, in E , $+ B q$, in $A q$, in E , $+ B$, in $Z S$, in $A - B$ in $A q q$.

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradus depressionem (quoad secundam radicem) lucrata est, ut hic patet. Cum enim homogenea sub E , adfecta in unam æquationis partem transferint.

Fiet $Z S$, in $D q$, $- A c$ in $D q + N q$, in $Z S - N q$, in $A c - B$ in $Z S$, in $A + B$ in $A q q$.

æquale $N q q$, in $E - N q$, in B , in A , in $E - B$, in A , in $N q$, in E , $+ B q$, in $A q$, in $E - Z S$, in D , in E , $+ A c$, in D , in E .

Neque ulterius progrediendum, cum jam secunda radix sub latere tantùm appareat; ideoque solo applicationis beneficio ipsius E , ratio ad primam radicem manifestabitur. Ut hic,

$Z S$, in $D q$, $- A c$ in $D q$, $+ N q$, in $Z S$, $- N q$, in $A c - B$, in $Z S$, in $A + B$, in $A q q$.

$N q q - N q$, in B , in $A - N q$, in B , in $A + B q$, in $A q$, $- Z S$, in $D + A c$, in D .

æquabitur E , quò tendendum erat.

Ut igitur duæ primùm propositæ radices in unam transeant, resumatur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris: depressior tamen idonea magis, ne altiùs ascendat æquatio.

Cum itaque in una ex æquationibus primùm propositis B , in $A + E q + D$, in E , æquetur $N q$, loco ipsius E , subrogetur jam agnitus ejus valor per relationem, vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo proposito est A . Et rursùm sub hac nova specie ordinetur æquatio; manifestum est evanuisse omnino secundam radicem, & in æquationem ab omni asymmetria liberam itum esse, methodumque esse generalem. Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata tertias. Si opus fuerit, radices ad primas & secundas; deinde secundas ad primas, &c. eodem prorsus artificio reducet.



A P P E N D I X

Ad superiorem methodum.



UPERIORI methodo debetur perfecta & absoluta asymmetriarum in Algebraicis expurgatio. Neque enim symmetrica climatismus Vietæ, quæ unicum hæctenus ad asymmetrias fuit remedium, efficax satis & sufficiens inventa est.

Proponatur quippe latus cubicum (B, in A qu. — A cub. + lat. quad. (A q, + 2. in A) + latus quad. quad. D, cub. in A — A, qu. qu.) + latus quad. (G, in A, — A q,) æquari rectæ N.

Qua ratione ab asymmetriis hujusmodi extricabit se & quæstionem suam Analysta Vietæus? An non potius dum crescit labor, crescit difficultas? Et tandem fatigatus & delusus novum ab analytice lumen exposcet?

Hoc sanè luculenter superior methodus subministrat: Vnicum exemplum, idque brevissimum, adjungimus. Recluso enim semel fundamento, cætera apertissimè manifestantur.

Proponatur lat. cub. (2. in A qu. — A, cub.) + L, cub. (Ac + B q, in A) æquari D.

Ita primùm ordinetur æquatio, ut unica ex asymmetriis unam illius partem faciat.

Fiat nempe D — lat. cub. (Ac + B q, in A) æqualis lat. cub. (2. in A q — A cub.)

Hoc peracto omnes termini asymmetri à secundis & ulterioribus, si opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo, quem unicum in unam æquationis partem rejecimus.

Fingatur, verbi gratiâ, lat. cub. (A cub. + B q, in A) esse E.

Hac enim viâ ad eam quam injungit superior methodus, duplicatæ æqualitatis analogiam deveniemus.

Erit nempe D — E, æqualis lat. cub. (2. in A q, — Ac,) & omnibus in cubum ductis. D, cubus + D, in E qu. ter — D q, in E, ter — E c. æquabitur 2. in A q — Ac.

Sed ex hypothese E, cubus æquatur A, cubò + B, qu. in A.

Ergo oritur duplicata æqualitas, & in utraque (juxta methodum) termini abs secunda radice adfecti, in unam æquationis partem sunt conjiciendi. Erit nempe.

2. in A q — Ac — D c, æqualis D, in E q, ter — D q, in E, ter — E c.

Item A, cub. + B² in A, æqualis E, cub.

Iteretur toties operatio, donec secunda radix ad primam revocetur. Quo peracto, loco ipsius E, novus ipsius valor usurpetur, & sub hac nova specie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur, omnia constabunt.

Nec inutilia adjungo, aut moror in superfluis. Quis enim non videt singulos terminos asymmetros posse eadem ratione, si non sufficiant secundæ radices, tertiis, quartis, &c. in infinitum insigniri? Quo casu quartam, sive ultimam radicem tamquam se-

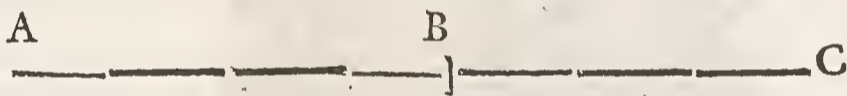
cundam considerabis. Reliquas verò tantisper, vel pro primis, vel pro terminis cognitibus habebis, donec ultima illa omnino evanuerit, sive ad primas, secundas & tertias reducta fuerint. Simili prorsus artificio tertias reduces ad secundas & primas, ac denique secundas ad primas, ut jam sæpius inculcavimus.

Nulla est ergo asymmetria quam non cogat exulare hæc methodus, cujus usus præsertim eximius, imò & necessarius innumerosa potestatum resolutione. Statim enim nempe atque asymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum in arithmeticis quæstionibus artificium: & si veris explicari numeris quæstio non possit, proximæ, quantumvis libuerit, suppetent solutiones. Cum tamen proximas veris solutiones, nullo pacto, quoadi duraverint asymmetriæ, consequi possis.

Sed & ulterius inquirenti obtulit se mira ad locorum superficialium plenam & perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ & ijs problematis inservit, in quibus dantur ab initio plura quàm requirat ipsa problematis construendi determinatio.

Quod ut clariùs intelligas, sunt quædam problemata quæ unicam tantùm agnoscunt positionem ignotam, quæ vocari possunt determinata, ad differentiam inter ipsa & problemata localia constituendam. Sunt alia quædam quæ duas positiones ignotas habent, & ad unicam tantùm numquam possunt reduci; eâ problemata sunt localia. In prioribus illis unicum tantùm punctum inquiremus; in istis lineam. Sed si problema propositum tres ignotas positiones admittat, problema hujusmodi non jam punctum dumtaxat, aut lineam tantùm, sed integram superficiem quæstioni idoneam investigat: indeque oriuntur loci ad superficiem, &c. in reliquis.

Sicut autem in prioribus data ipsa sufficiunt ad determinationem quæstionis, ita in secundis unum datum deest ad determinationem; in tertiis verò duo tantùm data determinationem possunt complere. At contrà potest fieri ut quemadmodum in his casibus data aut sufficiant aut desint: ita in plerisque aliis data ipsa superflua sint & abundant. Exemplo res fiet evidens.



In recta A C, datâ, datur rectangulum A B C. Datur etiam differentia quadratorum A B, & B C.

In hoc casu plura patet offerri data quàm determinatio, ideoque solutio ipsius quæstionis exposcat.

Frequentissimus tamen horum problematum, in physicis præsertim & apud artifices est usus, eaque omnia per applicationem simplicem beneficio nostræ methodi expediuntur; neque recurrendum ad extractionem radicum, licet æquationes ad quasvis potestates ascendat.

Proponatur, verbi gratiâ in quadam quæstione A, cub. + B, qu. in A, æquari 2. qu. in D.

Item etiam (cum ex hypothese quæstio supponatur esse abundans: has enim quæstiones abundantes, sicut locales deficientes appellare consuevimus) G, sol. in A — A q q, æquari B, qu. in N, pl. Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur, & ex præscripta methodo consideretur unica nostra radix ignota, quæ in hoc exemplo est A, sicut in præcedentibus secundam, aut ulterioris ordinis radicem consideravimus, & toties juxta methodum iteretur operatio, donec adfectio sub A, per simplicem applicationem possit expediri, sive non tam ad primas radices, quàm ad terminos omnino notos reduci. Patebit solutio problematis simplicissimâ, nec analystam deinceps æquationes quadraticæ, &c. remorabuntur.

Lubet & coronidis loco, famosi illius problematis:

Datis ellipsi & puncto extra ipsius planum, superficiem conicam, cujus vertex sit punctum datum, & basis ellipsis data, ita plano secare, ut sectio sit circulus.

Solutionem quæ huic methodo debetur, indicare, eamque simplicissimam.

Eò deducunt quæstionem Geometræ, ut sumptis quinque punctis ad libitum in ellipsi, & junctis rectis à vertice conicæ superficiei ad puncta illa per junctas quinque rectas circulum describant. Inveniuntque problema hoc pacto esse solidum. Sed cum puncta in ellipsi sint infinita, si loco quinque punctorum sumantur sex, fiet problema abundans, & orietur necessariò duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per simplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione si detur quæcumque linea curva in plano, aut etiam superficies localis, cujuscumque tandem gradus sint, invenientur diametri & axes figurarum; imo & in superficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci superficialis constitutivæ, &c.

Exponatur, verbi gratiâ, superficies conica, cujux vertex sit punctum datum, basis verò, parabole aut ellipsis cubica, aut quadratoquadratica, aut ulterioris in infinitum gradus.

Potest hujusmodi superficies conica, beneficio istius methodi ita secari, ut in ea exhibeatur quælibet curva, quæ ex constitutione figuræ in ea superficie potest describi, & problematis solutio semper evadet simplicissima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum, & plerisque aliis hujus methodi usibus: fient quippe obvii, nec sedulam indagatoris analytici meditationem effugient.





METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.

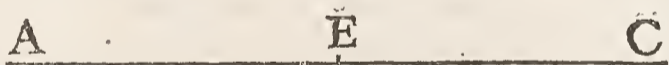


OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina ; duabus positionibus ignotis innititur ; & hac unica præceptione ; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum ; sive solidum , aut longitudo , prout proposito satisfieri par est ; & inventa maxima aut minima in terminis sub A ; gradu ut libet inuolutis ; Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A ; + E , iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E ; gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur , ut loquitur Diophantus. duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra (ab E , vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elationem ipsius gradum , donec aliquod ex homogeneis , ex parte utraque affectione sub E , omnino liberetur.

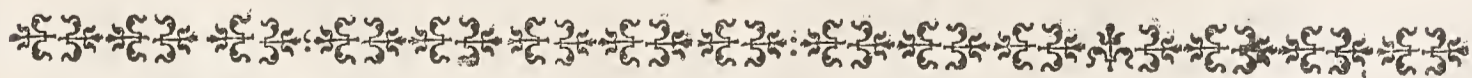
Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane ; quod eodem recidit , negata ad firmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A , quâ cognita , maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

Sit recta AC, ita dividenda in E, ut rectang. AEC, sit maximum ; Recta AC, dicatur B.

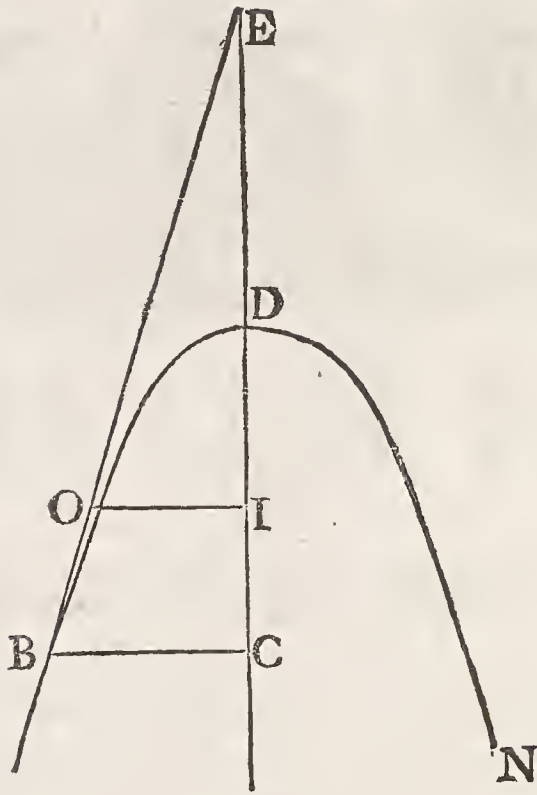


ponatur pars altera B, esse A, ergo reliqua erit B, - A, & rectang. sub segmentis erit B, in A, - A² quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergo reliqua erit B, - A - E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, - A² + B, in E, ²E in A, - E, quod debet adæquati superiori rectang. B, in A, - A², demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E² + E², & omnibus per E, divisis B, adæquabitur ²A + E, elidatur E, B, æquabitur ²A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.



De Tangentibus linearum curvarum.

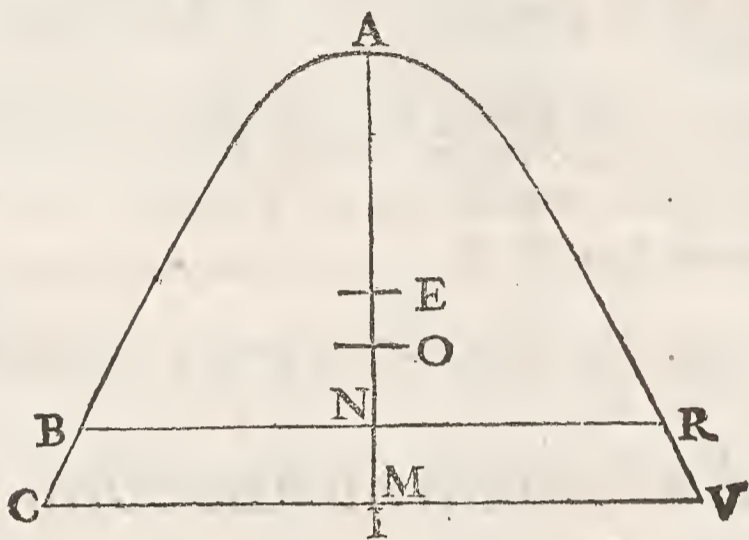
AD superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.



Sit data, verbi gratià, Parabole $B D N$, cujus vertex D , diameter $D C$, & punctum in ea datum B , ad quod ducenda est recta $B E$, tangens parabolē, & in puncto E , cum diametro concurrentem, ergo sumendo quodlibet punctum $O I$, in recta $B E$, & ab eo ducendo ordinatam $O I$, à puncto autem B , ordinatam $B C$ major erit proportio $C D$, ad $D I$, quàm quadrati $B C$, ad quadratum $O I$, quia punctum O , est extra parabolē, sed propter similitudinem triangulorum, ut $B C$, quad. ad $O I$, quad. ita $C E$, quad. ad $I E$, quad. Major igitur erit proportio $C D$ ad $D I$, quàm quadrati $C E$ ad quad. $I E$, Cum autem punctum B detur, datur applicata $B C$, ergo punctum C datur etiam $C D$, Sit igitur $C D$, æqualis D , data. Ponatur $C E$, esse A , ponatur $C I$ esse E , ergo D , aut $D - E$ habebit majorem rationem, quàm A^2 ad $A^2 + E^2 - A$, in E . Et ducendo inter se medias & extremas D in $A^2 + D$ in $E^2 - D$ in A in E , majus erit quàm D , in $A^2 - A^2$ in E , Adæquentur igitur juxta superiorem methodum, demptis itaque communibus D , in $E^2 - D$, in A in E adæquabitur $- A^2$ in E , aut quod idem est, D in E^2 , $+ A^2$ in E , adæquabitur D in A , in E , Omnia dividantur per E , ergo D in $E + A^2$ adæquabitur D in A , elidatur D in E , ergo A^2 æquabitur D in A^2 , ideoque A æquabitur D , ergo $C E$, probavimus duplam ipsius $C D$; quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis & rectis comprehensis, & in solidis invenimus, & multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis & rectis contentorum, imò & de proportione solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis & altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus.

Centrum gravitatis, parabolici conoidis,
ex eadem methodo.



EST O parabolicus Conois C B A V, cujus axis I A, basis, circulus circa diametrum C I V, quæritur centrum gravitatis perpetuâ & constanti, quâ maximam, & minimam & tangentes linearum curvarum investigavimus methodo, ut novis exemplis & novo usu, eoque illustri, pateat falli eos qui fallere methodum existimant.

Ut possit parari analysis, axis I A, dicatur B, ponatur centrum gravitatis esse O, & rectam A O, ignotam, dici A, secetur axis I A, quovis plano ut B N, & ponatur I N, esse E, ergo N A, erit B - E, constat in hac figura & similibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum in portionibus abscissis, per parallelas basi in eadem proportionè dividere axes (quod in parabola ab Archimede demonstratum porrigitur, non dissimili ratiocinio ad parabolas omnes, & parabolicos conoides, ut patet) ergo centrum gravitatis portionis cujus axis N A, basis semidiameter B N, ita dividet A N, in puncto, verbi gratia, E, ut ratio N A, ad A E, sit eadem rationi I A, ad A O, erit igitur in notis ut B, ad A, ita B - E, ad portionem axis A E, quæ idcirco æquabitur $\frac{B}{A} \text{ in } A - A \text{ in } E$, & ipsa O E, quæ est intervallum inter duo centra

gravitatis æquabitur $\frac{A}{B} \text{ in } E$, ponatur portionis reliquæ C B R V, centrum gravitatis

esse M, quod necessariò debet esse inter puncta N, & intra figuram per pet. 9. Archimed. de æquipond: cum figura C B R V, sit in easdem partes cavas, sed ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita est E O, ad O M, cum O, sit centrum gravitatis totius figuræ C A V, & puncta E, & M, sint centra gravitatis partium, Portio autem C A V, ad portionem B A R, est in nostro conoide Archimedæo ut quadratum I A, ad quadratum N A, hoc est in notis ut B^2 ad $B^2 + E^2 - B \text{ in } E$, ergo dividendo portio C B R V, est ad portionem B A R, ut $B \text{ in } E - E^2 B \text{ in } E$, demonstrauius autem ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita esse O E, ad O M, erit igitur in notis ut $B \text{ in } E^2 - \text{ad } B^2 + E^2 + E^2 E B, \text{ in } E$ ita O E, sive $\frac{A}{B} \text{ in } E$, ad O M, quæ pro-

inde applicabitur $\frac{B^2 \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A, \text{ in } E^2}{B^2 \text{ in } E - B \text{ in } E^2}$

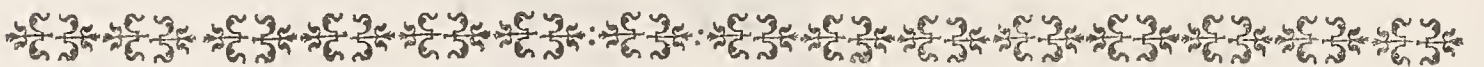
Cum autem punctum M, ex demonstratis, sit inter puncta N, & I, ergo recta

O M, erit minor rectâ OI, recta autem OI, in notis est $B - A$, deducta est igitur quæstio ad methodum, & adæquanda $B - A$ cum B^2 in A, in E, $+ A$ in $E^3 - B$ in A in E^2 .

$$\frac{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } E^2}{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } E^2}$$

Et omnibus ductis in denominatorem & abs E divisis adæquabuntur $B^3 - B^2$ in $A - B^2$ in E $- B$ in A in E, & B^2 in A $+ E^3 - B$ in A in E^2 , quandoquidem nihil est utrimque commune elidantur homogenea omnia ab E, adfecta, & æquentur reliqua, fiet $B^3 - B^2$ in A æqualis B^2 in A, ideoque A æquabitur B . Erit igitur IA, ad AO, ut 3. ad 2. & AO, ad OI, ut 2, ad 1, quod erat inveniendum. Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum, & parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum.

Quemadmodum autem, verbi gratia, in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso indaganda sint centra gravitatis, non vacat in præsens judicare, sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quæ servant proportionem II. ad. 51.



Ad eandem methodum.



VOLO mea methodo secare lineam AC datam ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato AB, & linea BC sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam AC, in quovis alio puncto.

Ponamus in notis Algebraicis lineam AC, vocari B, & lineam AB, incognitam A, BC, erit $B - A$; oportet igitur solidum A^2 in $B - A$, satisfacere quæstioni.

Sumamus iterum loco A, $A + E$, solidum quod fiet ex quad. $A + E$, & ex BEA, erit B in A^2 , $+ B$ in $E^2 + B$ in A in $E^2 - A^3 - A$ in $E^3 - A^2$ in E^3 .

Id comparo primò solido A^2 in $B - A^3$, tamquam essent æqualia, licet reverà æqualia non sint, & hujusmodi comparisonem vocavi adæqualitatem, ut loquitur Diophantus, sic enim interpretari possum græcam vocem *παρισότης* qua ille utitur, deinde è duobus solidis demo quod iis est commune scilicet B^2 , in $A - A^3$, quo peracto nihil ex unâ parte superest, & superest ex alia B in $E^2 + B$ in A in $E^2 - A^2$ in $E^3 - A^2$ in E^3 , Comparanda sunt ergo homogenea notata signo $+$ cum ijs quæ notantur signo $-$, & iterare comparisonem adæqualitatem oportet inter B in E $+ B$, in A, in E^2 , ex unâ parte, & A , in $E^3 + A^2$ in $E^3 + E^3$ ex altera totum dividamus per E. Comparatio adæqualitas, erit inter B , in E $+ B$, in A , & A , in $E^3 + A^2 + E^2$.

Hac divisione peracta si omnia homogenea dividi possunt per E, iteranda erit divisio per E, donec reperiatu aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis verbis utar, quod non afficiatur ab E, sed quia in exemplo proposito comperimus divisionem iterari non posse, hîc standum est. Deinde utrimque deleo homogenea, quæ afficiuntur ab E, superest ex unâ parte B , in A , & ex alia A^2 , inter quæ non amplius facere oportet æquationes, ut antea, comparationes fictas & adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per A, ergo B , erit æquale A , & B, erit ad A, ut 3 ad 2. Redeamus ad nostram quæstionem, & dividamus AC, in puncto B, ita ut AC, sit ad AB, ut 3 ad 2 dico solidum quadrati AB, in BC, esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea C, in qualibet alia sectione.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum è libro Apollonij de determinata sectione, qui ut refferat Pappus initio septimi libri, difficiles determinaciones habebat, & eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem *μοναχὸν καὶ ἐλάχισον* minimam & singularem, ideò scilicet, quia si proponatur quæstio circa magnitudines datas duobus semper locis satisficit quæstioni; sed in minimo aut maximo termino unicus est qui satisficiat locus, idcirco Pappus vocat minimam & singularem, id est unicam quæstionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat, quid per *μοναχὸς* intelligat Pappus, & veritatem quam modo explicui ignoravit; sed ecce propositionem. Sit recta data OMID, & in ea quatuor puncta OMID,



data, dividenda est portio MI, in puncto N, Ita ut rectanguli OND, sit ad rectangulum MNI, proportio minor, quàm proportio cujuslibet rectanguli paris OND, ad quodvis aliud par MNI, supponamus in notis lineam OM, datam vocari B, lineam DM, datam Z, & MI, datam G, fingamus nunc MN, quod quærimus vocari A, ergo rectangulum OND, in notis B, in Z - B, in A + Z, in A - A² & rectangulum MNI, erit G, in A - A², oportet igitur proportionem B, in Z - B + Z, in A - A² ad G, in A - A² esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ MI, sumamus iterum loco A, A + E, & habebimus proportionem B, in Z - B, in A - B, in E + Z, in A + Z in E - A² - E² - A, in ²E, ad G, in A + G, in E - A² - E² - A, in ²E, quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est multiplicare primum terminum per quartum ex una parte, & secundum per tertium ex alia, & simul hæc duo producta comparare, productum B, in Z - B, in A + Z, in A - A² qui prior est terminus per G, in A, + G, in E - A² - E² - A, in ²E, qui est ultimus terminus, facit B, in Z, in G, in A - G, in B, in A² + G, in Z, in A² - G, in A³ + B in Z in G in E - B in A in G in E + Z in A in G in E - A² in G in E - B in Z in A² + B in A³ - Z in A³ + A⁴ - B in Z, in E² + B in A in E² - Z in A in E² + A² in E² - B, in Z in A in ²E + B in A² in ²E - Z in A² in ²E - Z in A² in ²E + A³ in ²E.

Productum autem G in A - A² secundi termini per B in Z - B in A - B in E + Z in A + Z in E - A² - E² - A in ²E tertium terminum facit B in Z in G in A - G in B in A² - G in B in A in E + G in Z in A² + G in Z in A in E - G in A³ - G in A in E² - G in A² in ²E - B in Z in A² + B in A³ + B in A² in E - Z in A³ - Z in A² in E + A⁴ + A² in E² + A³ in ²E.

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem, demamus quod ipsis commune est & residuum dividamus per E, supererit ex una parte B in Z in G - A² in G - B in Z in E + B in A in E - Z in A in E - B in Z in ²A - Z in ²A² - B in ²A², & ex alia G in A in E - G in ²A² + B in A² - Z in A².

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E, supererit,

$$B \text{ in } Z \text{ in } G - A^2 \text{ in } G - B \text{ in } Z \text{ in } ^2A - Z \text{ in } ^2A^2 + B \text{ in } ^2A^2 \text{ æquale.}$$

$$- G \text{ in } ^2A^2 + B \text{ in } A^2 - Z \text{ in } A^2.$$

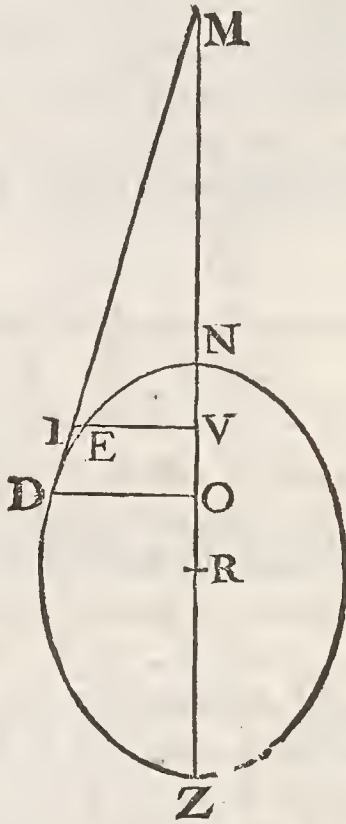
Et transponendo.

$$- B \text{ in } A^2 + Z \text{ in } A^2 - G \text{ in } A^2 + B \text{ in } Z \text{ in } ^2A \text{ erit æquale } B \text{ in } Z \text{ in } G.$$

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A, id est valorem MN, & consequenter punct. N & inveniemus veritatem propositionis Pappi qui docet ad repertiendum punctum N, oportere facere ut rectangulum OND ad rectangulum OI D, ita quadratum MN ad quadratum NI, æquationis enim resolutio nos ad eandem constructionem deducit.

Ut tandem tangentibus applicetur hæc methodus sic procedere possum.

Sit, verbi gratiâ, Ellipsis ZDN , cujus axis sit ZN , & centrum R , sumamus punctum ut D , in ejus circumferentia à quo ducamus lineam DM quæ tangat Ellipsim, ducamus præterea applicatam DO , & supponamus notis Algebricis OZ datam vocari B & ON datam vocari G , fingamus OM quam quærimus incognitam vocari A , intel-



ligimus autem per OM portionem Axis contentam inter punctum V sumptum ad libitum, inter punctum O & concursum tangentis.

Quoniam DM tangit Ellipsim si ducamus lineam IEV parallelam DO per punctum V sumptum ad libitum inter O & N , certum est lineam IEV secari tangentem DN , & Ellipsim quoque ut in punctis E & I , & quia linea DM tangit Ellipsim omnia puncta præter D erunt extra Ellipsim, ergo linea IV , erit major lineam EV . Erit igitur major proportio quadrati DO ad quadratum EV quam quad. DO ad quad. IV , sed ut quad. DO ad quad. EV ita proprietate Ellipsis rectang. ZON est ad rectang. ZVN , & ut quad. DO ad quad. IV ita quad. OM ad quad. VM , major est igitur proportio rectang. ZON ad rectang. ZVN quam quad. OM ad quad. VM . Fingamus sumptam ad libitum æqualem E , rectang. ZON erit B in G , rectang. ZVN erit B in $G - B$ in $E + G$ in $E - E^2$ quad. OM erit A^2 quad. VM $A^2 + E^2 - A$ in E^2 .

Erit igitur major proportio B in G ad B in $G - B$ in $E + G$ in $E - E^2$ quam A^2 ad $A^2 - E^2 - A$ in E^2 . Et consequenter si multiplicetur prior terminus per ultimum & secundus per tertium B in G in $A^2 + B$ in G in $E^2 - B$ in G in A in E^2 , productum scilicet prioris termini per ultimum, erit majus B in G in $A^2 - B$ in E in $A^2 + G$ in E in $A^2 - A^2$ in E^2 .

Oportet igitur juxta meam methodum comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune est & dividamus residuum per E , supererit ex unâ parte,

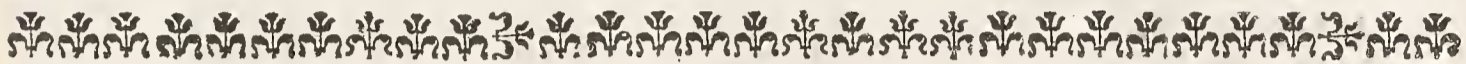
B in G in $E - B$ in G in A^2 , & ex alia,

$-B$ in $A^2 + G$ in $A^2 - A^2$ in E . Deleamus homog. quæ aliquid habent lineæ E , supererit ex una parte,

$-B$ in A^2 , & ex alia $-B$ in $A^2 + G$ in A^2 .

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet & transponendo terminos ut par est, inveniemus B in $A - G$ in A , æquale B in $A^2 G$. Vides hanc resolutionem eam-

dem esse cum Apolloniana, nam meâ constructione ad reperiendam tangentem oportet facere ut $B - G$ ad G ita 2B ad A , id est ut $Z O - O N$ ad $O N$, ita $^2Z O$ ad $O N$, sed Apollonianâ oportet facere ut $Z O$ ad $O N$, ita $Z M$ ad $M N$. Duæ autem illæ constructiones ut patet in idem recidunt; plura possem alia exempla addere, tum primum secundi casus meæ methodi, sed hæc sufficiunt, & eam esse generalem ac nunquam fallere satis probant. Demonstrationem regulæ non adjicio nec plerosque alios usus qui illius perfectionem confirmare possent, nec inventionem centrorum gravitatis asymptotæ quorum exemplum mihi doctissimo D. de Roberval.



Ad eandem Methodum.

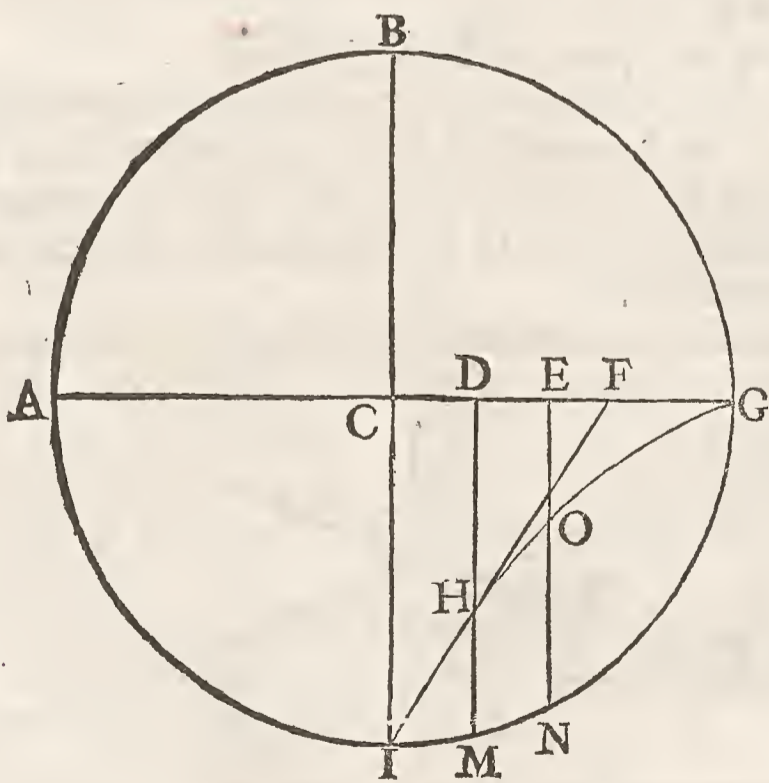
Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventionem maximæ & minimæ, cujus beneficio terminantur quæstiones omnes dioristica, & famosa illa problemata quæ apud Pappum in Præf. lib. 7. difficiles determinationes habere dicuntur, facillimè determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes, inquirimus, proprietates suas específicas vel per lineas rectas tantum absolvunt, vel per curvas, rectis aut alijs curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto, quod quia concisum nimis, difficile sanè, sed tamen sufficiens tandem repertum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per æqualitatem consideramus, & elisis, quæ monet doctrina de maxima & minima, homogeneis fit demum æqualitas, quæ punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, si placet, tangens cissoidis, cujus Diocles traditur inventor.



Polus est punctum I, recta K G, est asymptotos curva, recta I H E, perpendicularis ad asymptoton. Punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda tangens B A concurrrens cum I E in puncto A, sit factum ut supra, ducatur N C, parallela K G, ex proprietate specifica curvæ, recta L N est æqualis rectæ H E. Sumatur quodlibet punctum inter C & E, ut D à quo rectæ C N parallela ducatur D B, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietates specificæ debet considerari in tangente, jungatur B G, occurrens rectæ K G, in M, & ex præceptis artis recta M B adæquetur rectæ H E, oriatur tandem quæsitæ æqualitas, quod ut prodeat,

CA, ut supra vocetur A

CD, sit E

EN data sit Z

Et reliquæ datæ suis nominibus designentur.

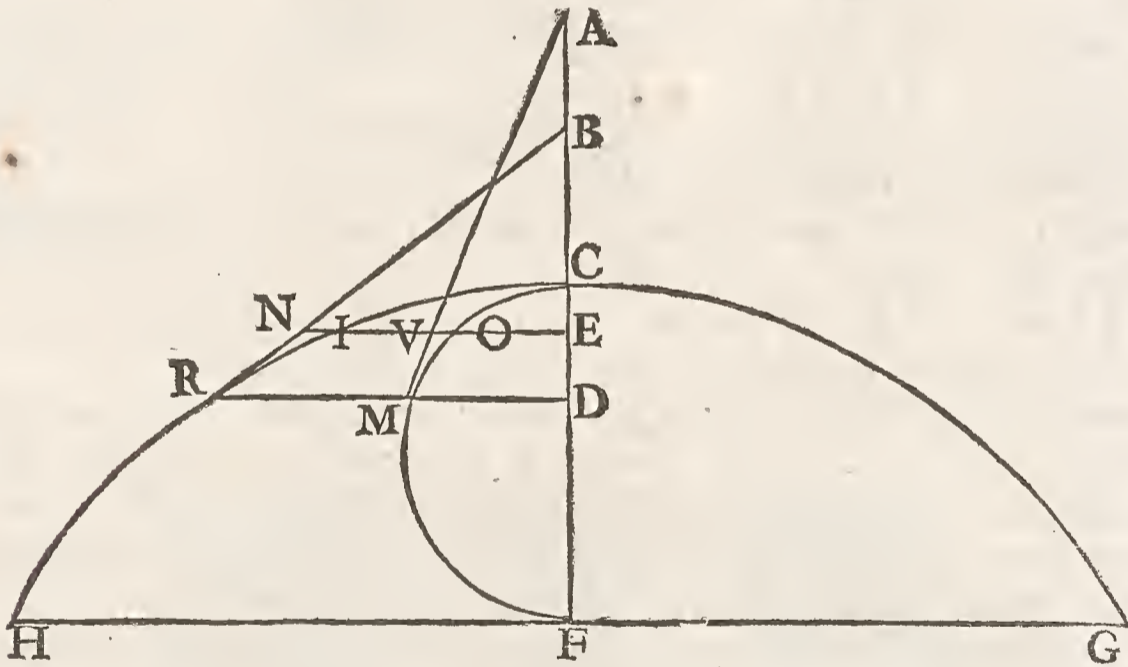
Invenietur facillimè recta M B, in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum rectæ H E, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant; ex his tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat D. DesCartes, cui nihil difficile, elegantissima, & non insubtili methodo fit satis.

Quamdiu rectæ tantum lineis homogenea implicabuntur, quærantur ipsa & designentur per præcedentem formulam, Imò & vitandæ asymmetriæ causa aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas, pro applicatis ad ipsas curvas sumantur, & demùm, quod operæ pretium est, portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, & procedat æqualitas, ut supra monuimus, proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Cycloide D. De Roberval assignamus.



Sit curva H R I C, cujus vertex C, axis E F, & descripto semicirculo C O M F, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo est ducenda tangens R B, ducatur à puncto R recta R M D, perpendicularis in C D F, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietates specificæ est, ut recta R D, sit æqualis portioni circuli A M, & applicatæ D M: Ducatur in puncto M, ex præcedente methodo tangens M A, ad circulum, (eadem nempe procederent si curva C O M esset alterius naturæ) Ponatur factum quod quæritur, & sit recta D B quæsitæ, æqualis A; D A inventa ex constructione æqualis B.

M A itidem inventa vocetur D,

M D data vocetur R,

R D vocetur Z

C M portio circumferentiæ data sit N

D E recta utcumque assumpta sit E,

Et a puncto E ducatur E O V I N parallela rectæ R M D,

Fiat ut A ad A - E, ita Z ad $\frac{Z A - Z E}{A}$ quæ idcirco æquabitur rectæ N I O V E;

Igitur recta $\frac{Z A - Z E}{A}$ debet æquari propter proprietatem specificam curvæ quæ

in tangente consideranda est, rectæ O E, unà cum curva C O. Curva autem C O æquatur curvæ C M - curvâ M O. Ergo recta $\frac{Z A - Z E}{A}$ debet æquari rectæ O E,

& curvæ C M - curvâ M O. Ut autem hi termini ad terminos analyticos reducantur, pro rectâ O E, ad vitandam asymmetriam, ex superiore cautione sumatur recta E V, applicata tangenti; & pro curva M O, sumatur portio tangentis M V, cui ipsa M O adjacet: ad inveniendam autem E V, in terminis analyticis fiet ut B ad B - E, ita R ad $\frac{R B - R E}{B}$ quæ idcirco æquabitur ipsi E V,

Ad inveniendam deinde M V, fiet ut B, ad D, ita E ad $\frac{D E}{B}$, quæ idcirco propter

triangulorum similitudinem, ut supra, æquabitur M V: Curva autem C M, vocata est N, igitur in terminis analyticis fiet æqualitas inter $\frac{Z A - Z E}{A}$ ex una parte

Et $\frac{R B - R E}{B} + \frac{N - D E}{B}$, ex altera;

Ducantur omnia in B A,

$Z B A - Z B E \} R B E - R A E + B N A - D A E,$

Cum autem ex proprietate curvæ Z $\} R + N$ ergo

$Z B A \} R B A + B N A,$

Ideoque ablatis communibus, reliqua comparentur,

Nempe Z B E, cum R A E + D A E,

Fiat divisio per E. Et quia nullum est hoc casu homogeneous superfluum, nulla fieri debet elisio. Igitur

$Z B \} R A + D A.$ Et fiet ut

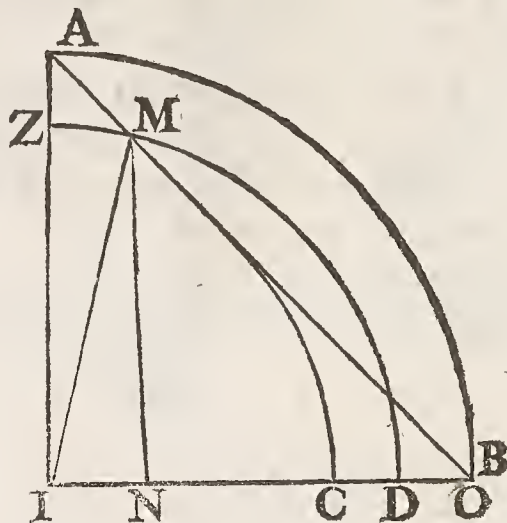
R + D, ad B, ita Z, ad A.

Ad construendum igitur problema, si fiat ut aggregatum rectarum M A, M D, ad rectam D A, ita R D, ad D B. Juncta B R tanget curvam C R. Quia verò ut summa rectarum M A, M D, ad D A, ita M D, ad D C, ut facile est demonstrare. Ideo faciendum erit ut M D ad D C, ita R D, ad D B, sive ut elegantior evadat constructio junctæ rectæ M C, ducenda erit parallela R B.

Eadem methodo species omnes illius curvæ tangentes suas nanciscentur.

Constructionem generalem olim dedimus.

Quoniam verò quæsitum est de tangente quadrataria, sive quadratricis Dinostrati, ita construimus ex præceptis præcedentibus.



Sit quadrans circuli AIB , quadrataria AMC , in qua ad datum punctum M , ducenda est tangens. Juncta MI , centro I , intervallo IM quadrans ZMD , describatur, & ducta perpendiculari MN , fiat ut IM ad MN , ita portio quadrantis MD , ad rectam NO , juncta MO , tanget quadratariam; hæc sufficient.

Quia tamen sæpiùs curvatura mutatur, ut in Conchoïde Nicomedæa, quæ pertinet ad priorem casum, & in omnibus speciebus curvæ Domini De Roberval, primâ exceptâ quæ pertinet ad secundum, ut perfectè curva possit delinearî, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexâ fit concava, vel contra. Cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis & minimis. Hoc præmissis lemmate generali.

Esto in sequenti figura curva $AHFG$, cujus curvatura in puncto H , verbi gratiâ, mutetur; Ducatur tangens HB , applicata HC , angulus HBC , erit minimus omnium quos tangentes cum axe ACD , sive infra, sive supra punctum H , efficiunt, ut facile est demonstrare. Sumatur enim supra H , punctum M , tangens occurreret axi inter A & B , ut in N , igitur angulus ad N major erit angulo ad B . Similiter si infra punctum H , sumatur punctum F punctum D , in quo concurrunt tangens FD , cum axe erit inferius puncto B , & tangens DF , occurreret tangenti BH , ad partes F & H . Igitur angulus ad D , erit major angulo ad B . Casus omnes non persequimur, sed modum tantum investigandi indicamus, cum curvarum formarum infinitas species exhibeant. Ut igitur verbi gratiâ, in exposito diagrammate punctum H , inveniatur, quæratur primùm ex superiore methodo ad punctum quodlibet curvæ utcumque sumptum proprietates tangentes. Hæc inventâ quæratur per doctrinam de maximis & minimis punctum H , à quo ducendo perpendicularem HC , & tangentem HB , recta HC , ad CB , habeat minimam proportionem. Eâ enim ratione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H , ita inventum esse initium mutationis in curvatura.

Ex prædicta methodo de maximis & minimis derivantur artificiosi singularem inventiones centrorum gravitatis, ut aliàs indicavi.

Sed & coronidis loco possunt etiam & datâ curvâ inveniri ipsius asymptoti quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc si libuerit, fusiùs aliquando explicabimus & demonstrabimus.





DE CONTACTIBUS SPHÆRICIS.

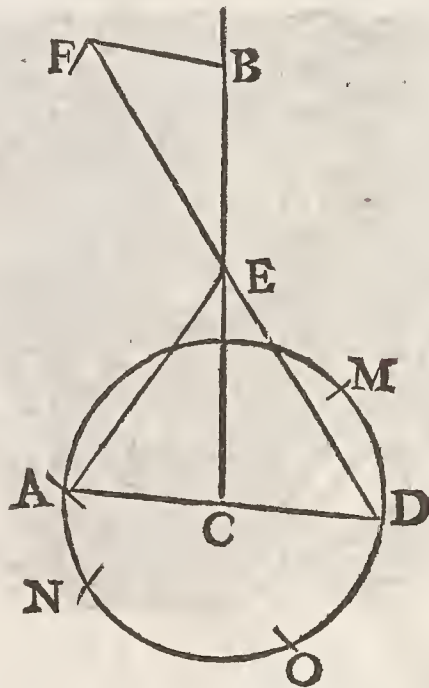


APOLLONII Pergæi doctrinam *ἄπὸ ἐπαφῶν* restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larvâ Franciscus ille Vieta Fontenænsis cujus miræ in Mathematicis lucubrationes veteri geometriæ felices præstiterunt suppetias. Verùm qui materiam hanc contactuum quæ hæctenus substitit in planis, ulterius promoverit, & ad sphærica problemata evehere sit ausus, adhuc, quod sciam, extitit nemo; præclara tamen inde problemata deduci & ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillimè derivari patebit statim. Quærenda itaque sphæra qua per data puncta transeat aut sphæras & data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

PROBLEMA I.

Datis quatuor punctis sphæram invenire quæ per data transeat.

Dentur quatuor puncta $N O M F$, per quæ Sphæra describenda est sumptis ad libitum tribus $N O M$, circa triangulum $N O M$, quod in uno esse plano constat ex elementis; describatur circulus $N A O M$, quem & magnitudine & positione dari per-

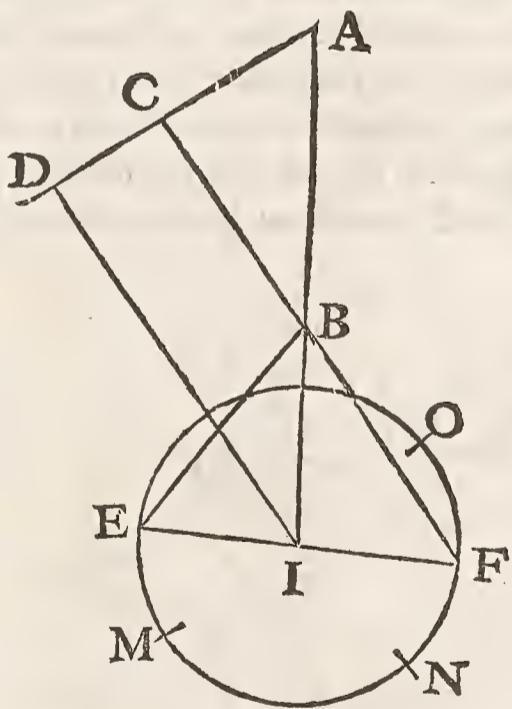


picuum est, esse autem circulum $NAOM$, in superficie inveniendæ Sphæræ patet, ex eo quod si Sphæra plano secetur sectionem datò circulum, at per tria puncta NMO , Unicus tantùm circulus describi potest, quem jam construximus, cum igitur tria puncta NOM sint in superficie Sphæræ quæsitæ, ergo planum trianguli NOM , Sphæram quæsitam secat secundum circulum $NAOM$, quem ideo in superficie Sphæræ esse concludimus. Sit ipsius centrum C , à quo ad planum circuli excitetur perpendicularis CEB , patet in recta CB , esse centrum Sphæræ quæsitæ, à puncto F , in rectam CB , demittatur perpendicularis FB , quam & positione & magnitudine dari perspicuum est, à puncto C , ducatur CAD , ipsi FB , parallela, erit igitur angulus BCA rectus, sed & recta BC , est perpendicularis ad planum circuli. Ergo recta ACD , est in plano circuli, & datur positione, dantur itaque puncta AD , in quibus cum circulo concurrat, ponatur jam factum esse, & centrum inveniendæ Sphæræ esse E , quod quidem in rectâ CB , reperiri jam diximus ex Theodosio junctæ rectæ FE, AE, ED , erunt æquales, cum tria puncta nempe F, A, D , ex hypothese & A, D , ex demonstratis sint in superficie spherica, at tres rectæ FE, AE, ED , sunt in eodem plano, cum enim rectæ FB, ACD , sint parallelæ, erunt in eodem plano, sed & recta CB , ideoque tres FE, AE, DE ; si igitur circa tria puncta data AFD , describatur circulus, ejus centrum E , erit in recta CB , ac proinde & Sphæræ quæsitæ centrum & Sphæra ipsa non latebunt.

PROBLEMA II.

Datis tribus punctis & plano invenire spheram quæ per data puncta transeat, & planum datum contingat.

Dentur tria puncta NOM , per quæ circulus descriptus $MEON$, erit ad superficiem Sphæricam quæsitam ex jam demonstratis, & in excitatâ ad planum circuli rectâ IBA , invenietur centrum Sphæræ quam quærimus; concurrat recta IBA , cum



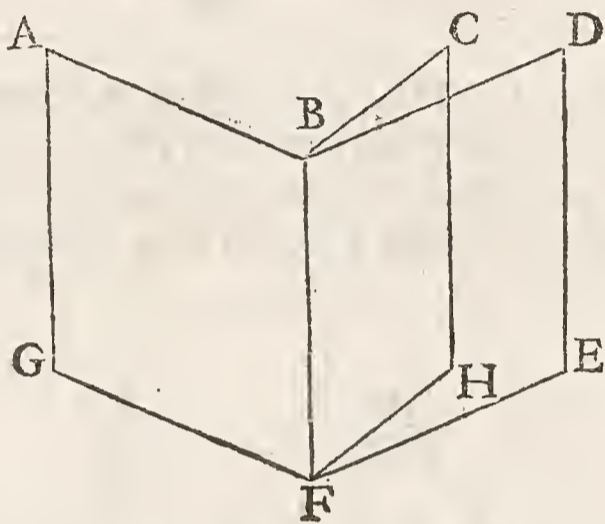
plano dato in puncto A , dabitur igitur punctum A , positione à centro circuli $NEOM$, demittatur perpendicularis in planum datum ID , dabitur igitur punctum D , ideoque & recta AD , positione & magnitudine, & pariter rectæ ID , & IA , dabitur igitur.

PROBLEMA IV.

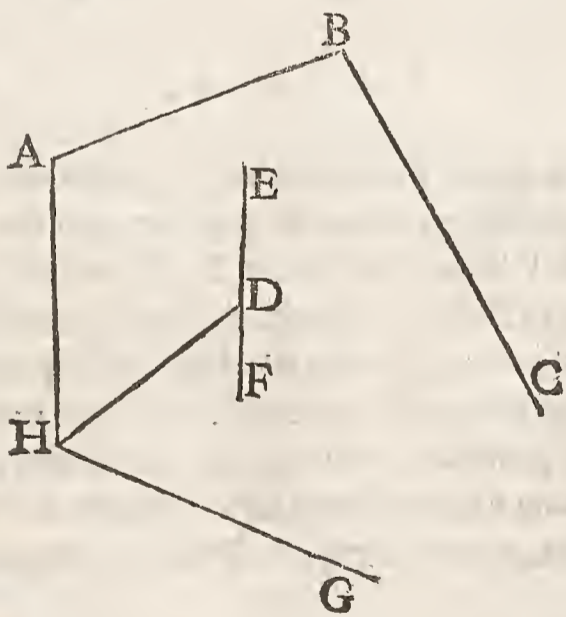
Datis quatuor planis invenire sphaeram quaë data quatuor plana contingat.

DEntur quatuor plana AH , AB , BC , HG quaë à sphaerâ quaësitâ contingi oporteat.

Sint duo plana AF , FD quaë ab eadem sphaerâ contingantur, bisecetur ipsorum inclinatio per planum BFH , patet centrum sphaeræ quaë duo plana AF , FD contingit esse in plano bisecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutiùs immorari, si pla-



na AF , FD , essent parallela sphaeræ; centrum esset in plano ipsis parallelo, & interval- lum ipsorum bisecante, hoc posito propter plana CB , BA , positione data quod nempe datorum CB , BA , planorum inclinationem datam bisecat. Sed propter duo plana BA , AH ; est idem centrum sphaeræ quaësitæ ad aliud planum positione datum; ergo communis sectio duorum planorum positione datorum; quorum alterum incli-

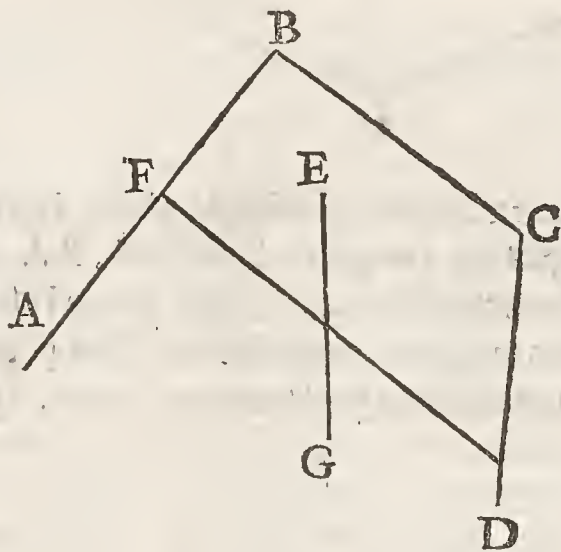


nationem planorum CB , BA , alterum inclinationem planorum BA , AH , bisecat, dabit rectam positione datam, in quâ inveniendæ sphaeræ centrum erit. Sit illa recta FE , sed propter duo plana AH , HG , est etiam centrum sphaeræ quæsitæ ad aliud planum positione datum cuius concursus cum recta FE , positione datâ dabit punctum D , quod patet esse sphaeræ quæsitæ centrum, & reliqua constabunt.

PROBLEMA V.

Datis tribus planis & puncto invenire sphaeram quæ per punctum datum transeat & plana data contingat.

Sint data tria plana AB , BC , CD , & punctum H , quærenda sphaera quæ data tria plana contingens transeat per punctum H . Sit factum; tria plana data ex præcedentis propositionis ratiocinio dabunt rectam positione datam quæ sedes erit centri sphaerici quæsitæ. Sit illa GE , in quam à puncto dato H demittatur perpendicularis

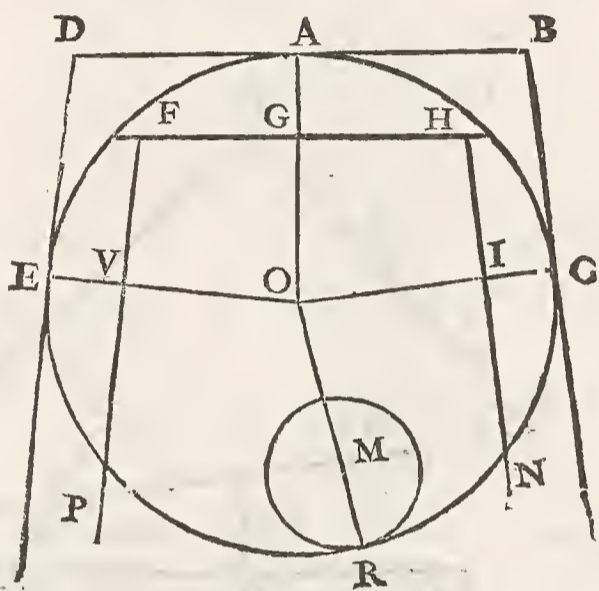


HI , quæ & positione & magnitudine dabitur, producat ad F , ut sit IF , æqualis IH , dabitur punctum F , cum autem sphaeræ quæsitæ centrum sit in recta GE , ad quam ducta est perpendicularis HF bifariam secta in I , cuius unum ex extremis H est ad superficiem sphaericam ex hypothese, erit & alterius extremum F , etiam ad sphaericam superficiem. Imò & circulus centro I , interuallo IH , descriptus in plano recto ad rectam GE erit ad superficiem sphaeræ; datur autem ille circulus positione & magnitudine, dato autem circulo sphaerico positione & magnitudine & aliquo plano ut AB . Datur ex facili propositionis secundæ hujus constructio sphaera ad cuius superficiem sit circulus datus & quæ planum datum contingat, deducta est itaque quæstio ad secundam hujus, nec reliqua latebunt.

PROBLEMA VI.

Datis tribus planis, & sphaerâ, invenire sphaeram quæ datam sphaeram & plana data contingat.

Dentur tria plana ED, DB, BC , & sphaera RM , construenda est sphaera quæ datam sphaeram & tria pariter plana contingat. Sit factum & sphaera $ERCH$, fatisfaciat proposito sphaeram nempe in puncto R .

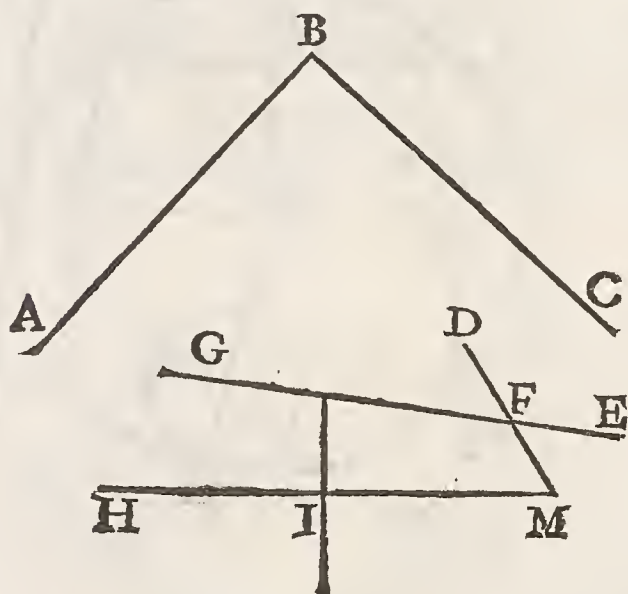


Et plana in punctis E, A, C , contingens, sphaeræ, $ERCH$, centrum fit O , junctæ RO, EO, AO, CO , erunt æquales, sed & recta OR , transibit per datæ sphaeræ centrum M , & rectæ EO, OA, OC , erunt perpendiculares ad plana data DE, DB, BC . Fiant rectæ OM , æquales rectæ OV, OG, OI , & per puncta VGI intelligantur duci plana VP, GH, IN , datis ED, DB, BC , parallela, cum recta OR , æqualis sit OE , & ablata OM , ablata OV , erit reliqua RM , reliquæ VE , æqualis, datur autem magnitudine RM , cum sit radius sphaeræ datæ; datur igitur & VE magnitudine; cum autem OE , sit perpendicularis ad planum DE , erit etiam perpend. ad planum PV , plano DE , parallelum, recta igitur VE , erit intervallum planorum DE, PV , sed datur VE magnitudine ex demonstratis, ergo datur planorum DE, PV , intervallum; sunt autem parallela hæc duo plana, & datur DE positione ex hypothesi; datur igitur & PV , positione. Similiter probabitur plana GH, IN , dari positione & rectas OV, OG, OI , ad ipsa esse perpendiculares & æquales rectæ OM , sphaera igitur centro O , intervallo OM , descripta plana PV, GH, IN , positione data contingit. Datur autem punctum M , cum sit centrum sphaeræ datæ. Eò itaque deducta est quæstio ut datis tribus planis PV, GH, IN , & puncto M . inveniatur sphaera quæ per datum punctum M , transeat & data plana PV, GH, IN , contingat, hoc est deducitur quæstio ad præcedentem, nec absimili in sequentibus artificio cum nulla in datis puncta reperientur, sed sphaeræ tantum aut plana, in locum unius ex sphaeris punctum datum substituetur.

PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis & duobus planis invenire
Sphæram quæ per data puncta transeat
& plana data contingat.

Dentur duo plana AB, BC , & duo puncta H, M . quærenda sphæra quæ per puncta H & M transeat & plana AB, BC , contingat. Jungatur recta HM , & bifecetur



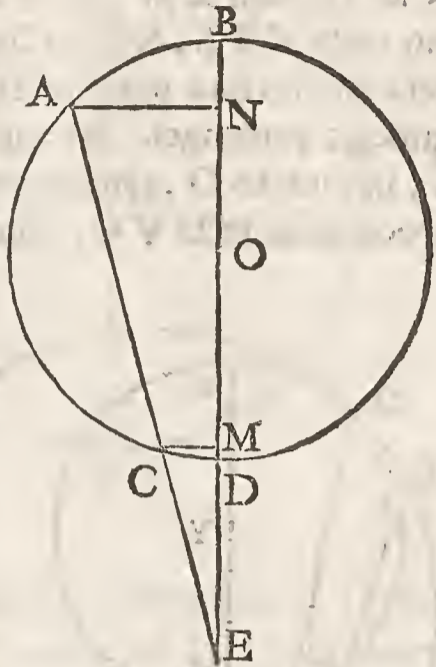
in I , punctum I , dabitur, per punctum I , trajiciatur planum ad rectam HM , rectum, cum Sphærica superficies puncta H, M , contineat, certum est centrum Sphære esse in plano ad rectam HM , normali, & per punctum I , transeunte, datur autem hoc planum positione cum recta HM , & punctum I . Sint data positione, ergo centrum sphære propter puncta H & M , est ad planum datum. Sed & propter plana AB, BC , ut jam superius demonstravimus, est ad aliud planum datum, ergo est ad rectam positione datam, sit illa GE , in quam demissa ab uno ex punctis datis M , recta MF , dabitur positione & magnitudine & continuata in D , ut sit FD , æqualis MF , erit punctum D , datum & ex superius demonstratis erit etiam ad sphæricam superficiem, dantur itaque tria puncta HMD , per quæ sphæra quæ sita transit, datur etiam planum AB , quod ab eadem sphæra contingi debet; deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

Priusquam progrediamur ulterius, præmittenda lemmata quædam facillima.

LEMMA I.

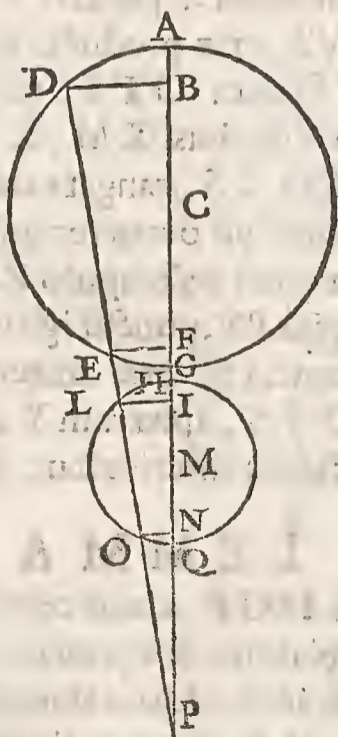
SIT circulus BCD , extra quem sumpto quolibet puncto E , trajiciatur per centrum recta ED , OB , ducatur quælibet ECB , patet ex elementis rectangulum AEC , æquari rectangulo BED . Sit jam sphæra circa centrum O , cujus maximus circulus sit $ACDB$, si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiæ sphæricæ trajiciatur recta ECA , donec sphære ex altera parte occurrat, rectangulum AEC , erit similiter æquale rectangulo BED , si enim intelligatur circa rectam immobilem BDE ,
conuerti

converti, & circulus & recta $E C A$, simul non immutabuntur rectæ $E C$, & $E A$, cum puncta C , & A , circulos describant ad axem rectos, nec idcirco rectangulum $A E C$, erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo $B E D$.



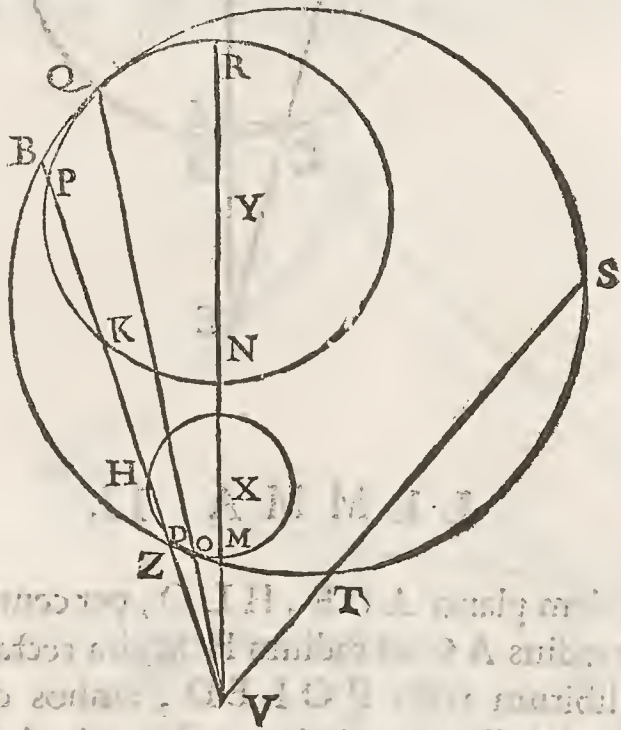
LEMMA II.

Sint duo circuli in eodem plano ADE , HLO , per centra ipsorum trajiciatur recta $SACMP$, & fiat ut radius AC ad radium HM , ita recta CP , ad rectam MP , & à puncto P , ducatur ad libitum recta $POLED$, ambos circulos secans in punctis OE , LD ; demonstravit Apollonius Gallus rectangula APQ , GPH esse æqualia & ipsorum cuilibet æquari rectangula DPO , EPL . In sphericis idem quoque verum esse sequentium problematum interest, patet autem ex eo quod si circa axem AP immobilem tam circuli duo quàm recta $POLED$, eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ PO , PL , PE , PD , propter allatam in superiori lemmate rationem nec idcirco rectangula, & in quocumque plano constabit propositum.



LEMMA III.

Sint duæ sphaeræ datæ YN , XM per quarum centra trajiciatur recta $RYNXM$ V , & fiat ut radius YN ad radium XM , ita recta YV , ad rectam VX , à puncto V ducatur in quolibet plano recta VTS , & sit rectangulum SVT æquale rectangulo RVM , si describatur sphaera quævis quæ per puncta TS , transeat & unam ex duabus datis contingat, alteram quoque continget. Sit enim sphaera OTS , per puncta T & S descripta & sphaeram XM , in puncto O , contingens, aio sphaeram YN , etiam à sphaera OTS contactam iri, producatu recta VO , donec sphaeræ OTS , occurrat in Q , re-



ctangulum igitur QVO ex primo lemmate est æquale SVT ; sed rectangulum SVT ex constructione est æquale rectangulo RVM , cui ex secundo lemmate est æquale rectangulum sub VO , & recta per puncta V & O ad superficiem sphaericam sphaeræ YN , producta, ergo punctum Q est ad superficiem sphaeræ YN , commune igitur est & superfici sphaeræ YN , & superfici sphaeræ OTS . Aio has duas sphaeras in puncto eodem Q , se contingere, ducatur enim à puncto V , quælibet recta in quolibet plano sphaeræ OTS , & sit verbi gratia VZ , quæ producta secet sphaeras tres in punctis $ZDHP$ PB , rectangulum ZVB in sphaera OTS , per primum & secundum lemma est æquale DVP rectangulo, sphaeris duabus XM , & YN , terminato. Sed DV , est major recta VZ , cum enim sphaerâ OTS , tangat exterius sphaeram XM in puncto O , recta secans sphaeram OTS , prius ipsi occurreret quàm sphaeræ XM . Cum ergo probatum sit rectangulum DVP , æquari rectangulo ZVB , & recta ZV , sit minor recta DV , ergo recta PV erit minor recta BV , punctum igitur B extra sphaeram YN cadet. Simili ratiocinio concludetur omnia puncta sphaeræ ambientis exterius cadere, præter punctum Q , tangit igitur sphaera OTS , sphaeram YN quod erat demonstrandum, nec absimilis aut difficilior in contactibus interioribus, & in omnibus casibus demonstratio.

LEMMA IV.

SIT planum AC , & sphaera DGF , cujus centrum O , per centrum O , ducatur $SFODB$ perpendicularis ad planum & à puncto F ducatur recta quævis ad planum sphaeram secans in G , & planum in A . Aio rectangulum AFG , æquari rectangulo BFD , nam secetur sphaera ad planum datum, per planum trianguli ABF , & fiat circulus GFD in sphaerâ, in plano autem recta ABC , cum recta FB , sit perpendicularis ad

ciem sphaeræ $E G F$, sed & rectangulum $C F E$, ex constructione est æquale rectangulo $I F H$, rectangula igitur $I F H$, $B F N$, sunt æqualia; ideoque punctum N , est etiam ad superficiem sphaeræ $I B H$. Probandum jam sphaeram $E G F$, à sphaera $I B H$, in puncto N contingi, quod quidem facile est, à puncto enim F , per quodlibet punctum sphaeræ $E G F$, ducatur recta $F R$, quæ sphaeram $I B H$, in H & P , & planum $A C$ in K secet, rectangulum $K F R$ ex præcedente lemmate æquatur rectangulo $C F E$, cui ex constructione æquatur rectangulum $D F H$, ideoque $P F H$ rectangula, igitur $K F R$, & $P F H$ sunt æqualia, sed recta $K F$ est major recta $F P$, quia sphaera $I B H$, tangit planum $A C$ in B , ergo recta $F R$ est minor recta $F H$, punctum igitur R est extra sphaeram $I B H$. Idem de quocumque alio puncto in quovis plano sphaeræ $E G F$, ex utraque puncti N parte probabitur; manifestum itaque sphaeram $E G F$, à sphaerâ $I B H$, in puncto N contingi.

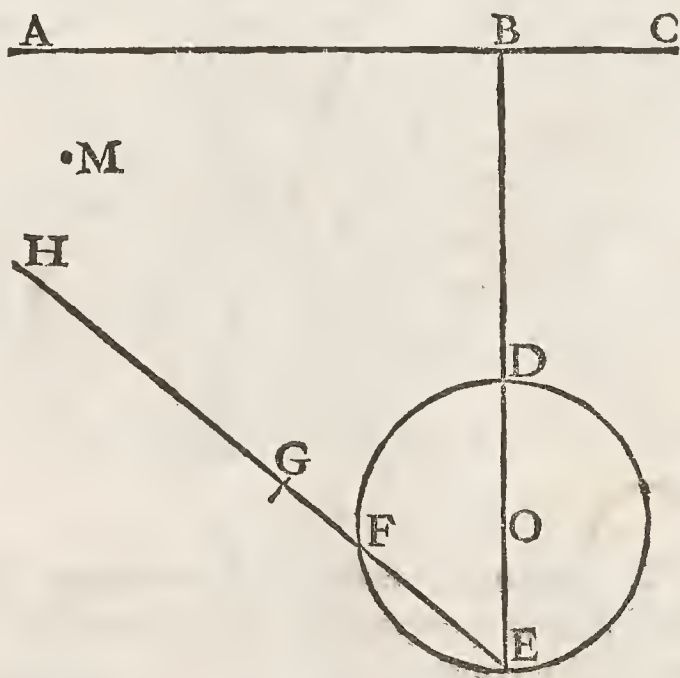
Hæc lemmata licet sint facilia, pulcherrima tamen sunt, tertium præsertim & quintum, in tertio quippe infinitæ sunt sphaeræ quæ per puncta T & S transeunt sphaeram $X M$, contingunt, sed omnes illæ in infinitum tangent quoque ex demonstratis sphaeram $Y N$, in quinto autem lemmate infinitæ sunt sphaeræ quæ per puncta I & H transeunt planum $A C$ contingunt, sed omnes illæ pariter in infinitum sphaeram $E G F$, ex demonstratis contingent.

His suppositis reliqua problemata facile exequemur.

PROBLEMA VIII.

Datis duobus punctis plano & sphaerâ invenire sphaeram quæ per data puncta transeat & sphaeram ac planum datum contingat.

SIT datum planum $A B C$, sphaera $D F E$, & puncta $H M$, per centrum sphaeræ datæ O in planum $A B C$, datum demittatur perpendicularis $E O D B$, jungatur $H E$, & rectangulo $B E D$, fiat æquale rectangulum $H E G$; dabitur itaque punctum G , datis tribus punctis H, G & M , & plano $A B C$, quærat sphaera per 2. pro-

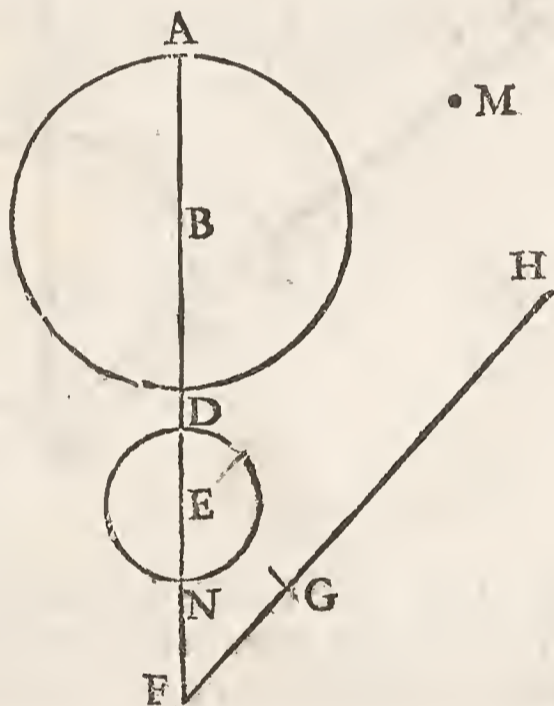


blema hujus, quæ per data tria puncta transeat & planum A B C datum contingat. Sphæra illa satisfaciet proposito, transit quippe per data duo puncta H & M, & planum A B C tangit ex constructione, sed & sphæram D F E contingit, ex quinto lemmate; nam cum rectangulum H E G, æquetur rectangulo B E D, omnis sphæra quæ per data duo H & G puncta transiens planum A B C tangit, sphæram quoque D E F contingit.

PROBLEMA IX.

Datis duobus punctis & duabus sphæris invenire sphæram quæ per data duo puncta transeat & sphæras datas contingat.

Sint datæ duæ sphæræ A B, D E, & puncta data, H & M, trajiciatur recta A F, per centra sphærarum datarum, & ut radius A B ad radium D E: ita fiat recta B F, ad F E,

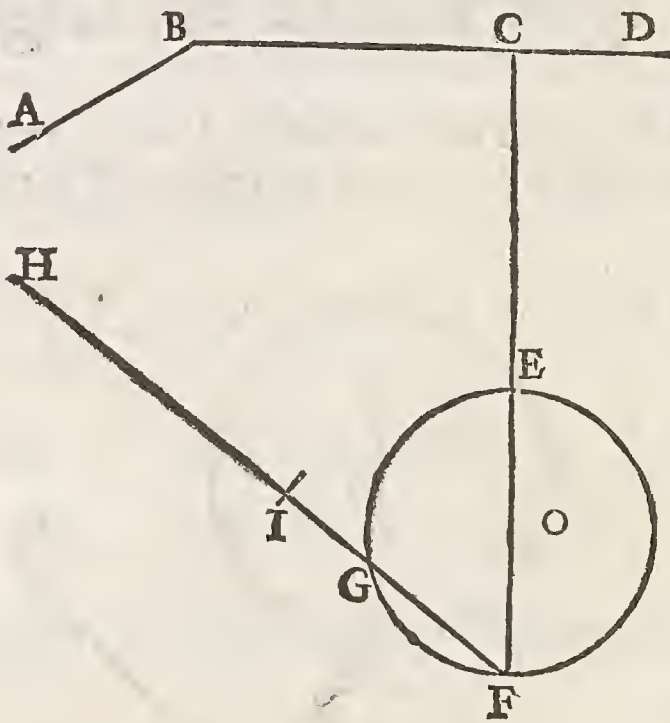


dabitur punctum F, fiat rectangulo N F A, æquale rectangulum H F G, dabitur punctum G. Jam datis tribus M, G, H, punctis & sphærâ D N, quæratu r sphæra quæ per data tria puncta transeat & sphæram D N datam contingat, cui problemati satisfaciet tertium problema hujus, continget quoque sphæram ex 3. lemmate ideoque proposito satisfaciet.

PROBLEMA X.

Dato puncto, duobus planis, & sphaerâ invenire sphaeram, quæ per datum punctum transeat & sphaeram, ac data duo plana contingat.

Sint duo plana AB, BD , sphaera EFG , punctum H , per punctum O centrum sphaeræ datæ in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEO , & rectangulo



CFE , fiet æquale rectangulum HFI , datis duobus punctis H , & I , & duobus planis AB, BD . Quærat per septimum problema hujus sphaera quæ per data duo puncta transeat & duo plana data contingat, continget quoque ex quinto lemmate sphaeram, & proposito satisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano, & duabus sphaeris invenire sphaeram quæ per datum punctum transeat & planum, ac sphaeras duas datas contingat.

Deducetur statim quæstio simili præcedentibus ratiocinio ad problema octavum, datis duobus punctis, plano & sphaerâ, idque beneficio lemmatis quinti. Quod si libeat uti lemmate tertio deducetur quæstio pariter ad idem problema alio medio & aliâ constructione.

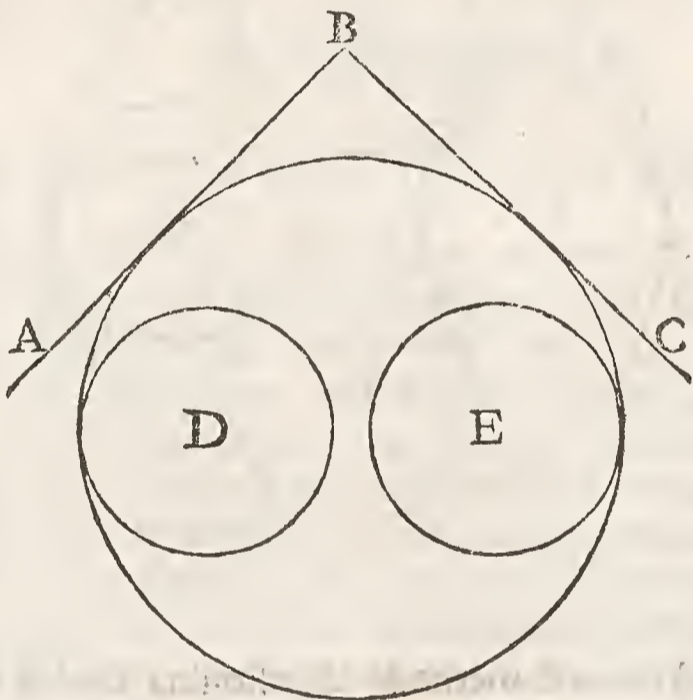
PROBLEMA XII.

Dato puncto & tribus sphaeris, invenire sphaeram
 qua per datum punctum transeat & sphaeras
 datas contingat.

Hic quoque figuram non assignamus, statim quippe beneficio lemmatis 3. deduce-
 tur quaestio ad problema IX. datis duobus punctis, duabus sphaeris, &c.

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis & duabus sphaeris, invenire
 sphaeram qua data plana & sphaeras contingat.



SIT factum. Si ergo sphaericæ superficiæ inventæ imaginemur aliam ejusdem cen-
 tri superficiem parallelam qua à quaesitâ distet per radius minoris ex sphaeris, tan-
 get hæc nova superficies sphaerica plana qua à datis distabunt per intervallum ejusdem
 radij minoris ex sphaeris, tanget quoque sphaeram cujus radius distabit à radio majoris
 sphaeræ datæ per idem radij minoris intervallum, quæque erit majori sphaeræ concentri-
 ca, dabitur ergo, dabuntur & duo plana datis parallela & per radius minoris ex sphae-
 ris ab ipsis distantia, transibit & hæc nova superficies sphaerica per centrum minoris ex
 sphaeris datis, quod quidem datum est, pari igitur quo usi jam sumus in Problemate VI.
 artificio deducetur quaestio ad problema X. dato puncto, duobus planis & sphaera in-
 venire &c.

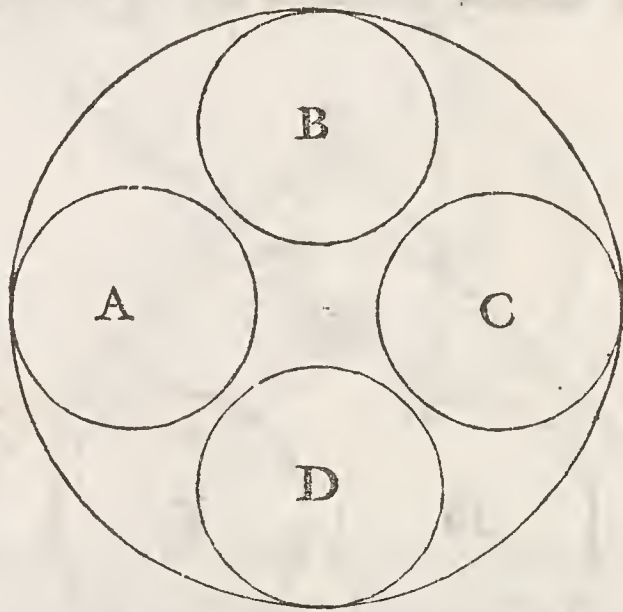
PROBLEMA XIV.

Datis tribus sphaëris & plano invenire sphaëram
quæ sphaëras & planum datum contingat.

Simili quâ usi sumus viâ in præcedente & VI. Problemate deducetur quæstio ad
Problema XI. dato puncto, plano & duabus sphaëris &c.

PROBLEMA XV.

Datis quatuor sphaëris invenire sphaëram quæ
datas contingat.



SIT factum, & quâ usus est methodo Apollonius Gallus ut problema de tribus
circulis ad problema de puncto & duobus circulis deduceret, eâdem & simili præ-
cedentibus famosum hoc & nobile problema ad XII. datis tribus sphaëris & puncto
deducemus. Constabit ex omni parte propositum, & illustre accedet Apollonio Gal-
lo complementum.

Casus varios, determinaciones, & minuta negleximus, ne in immensum excef-
ceret sphaëricus de contactibus tractatus.



DE

LINEARUM

CURVARUM

CUM LINEIS RECTIS

comparatione

DISSERTATIO GEOMETRICA.



ONDUM, quod sciam, lineam curvam purè Geometricam rectæ datæ Geometræ adæquarunt. Quod enim à subtili illo Mathematico Anglo nuper inventum & demonstratum est cycloidem nempe primariam diametri circuli ipsam generantis esse quadruplam, hoc suam ex sententiâ doctissimorum Geometricarum videtur habere limitationem, ij quippe hanc esse legem & ordinem naturæ pronuntiant ut non sinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin priùs supposita fuerit alià recta alteri

curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipsis allato ita se habere deprehendunt, nec nos diffitemur, cum constet descriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum rectâ, hoc est circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum rectâ quæ est basis ipsius cycloidis. Sed quàm vera sit hæc, quam statuunt, lex naturæ, & quàm periculosum ab uno aut altero experimento statim ad axioma prope- rare, infrà patebit. Nos enim curvam verè Geometricam & ad cujus constructionem nulla talis alterius curvæ cum rectâ æqualitas præcessisse supponatur, rectæ datæ æqua- lem esse demonstrabimus; & paucis, quantum fieri poterit, totum negotium absolve- mus.

Hæc
Dissertatio
typis edi-
ta fuit
anno
1660.
occul-
to Au-
toris
nomi-
no.

PROPOSITIO PRIMA.

SIT in Figura prima curva quævis A H M G in easdem partes curva, exempli cau-
sâ, una ex parabolis infinitis in quâ tangentes extra curvam cum base A F & axe F G concurrant, & sumatur in hujusmodi curvâ quodvis punctum H per quod duca-
tur tangens I H K, in qua sumptis ex utraque parte punctis K & I demittantur perpen-
diculares I B, K D in basim A F quæ secent curvam in punctis R & M. Aio portio-

M

Exponatur curva aliqua ex prædictis in 2. Figura. Secetur basis A F in quodlibet portiones æquales, AB, BC, CD, DE, EF, FG, & à punctis B, C, D, E, F, erigantur perpendiculares BQ, CV, DZ, ER, FM, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O, Ducantur item tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI. Ex primâ propositione patet tangentem AQ, portione curvæ AP esse majorem: item tangentem PV, portione curvæ PT esse majorem & sic de reliquis, tandemque etiam ultimam OI portione curvæ OH esse majorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium AQ, PV, TZ, YR, NM, OI, portionibus curva ipsa major erit.

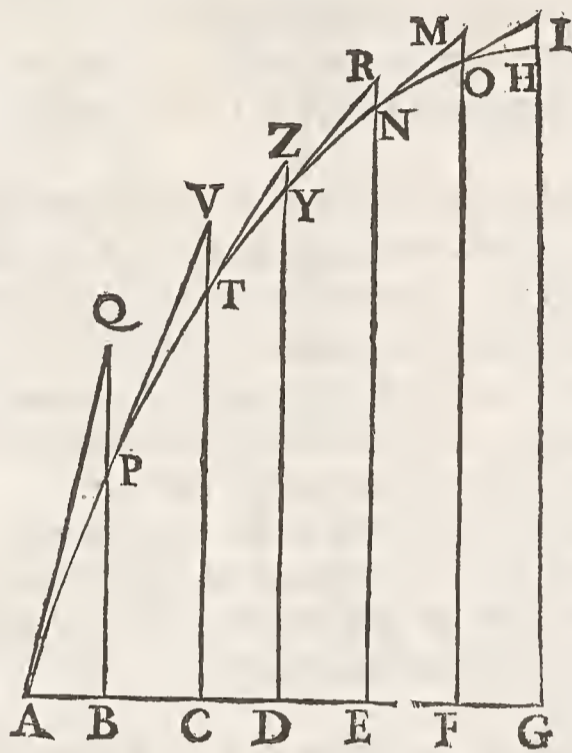


Figura
2.

At exponatur eadem curva in 3. Figura cujus basis AG in eundem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F. à punctis B, C, D, E, F ut supra erigantur perpendiculares BR, CQ, DO, EL, FI quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K, à puncto autem S in hac tertia figura, ducatur tangens ST, occurrens perpendiculari AT, deinde à punctis PN, M, K, H ducantur tangentes PR, NQ, MO, KL, HI occurrentes perpendicularibus BS, CP, DN, EM, FK, in punctis R, Q, O, L, I. Ex prima propositione patet tangentem ST portione curvæ AS esse minorem, item tangentem PR portione curvæ PS esse minorem & sic deinceps, tandemque ultimam IH quæ parallela est basi, portione curvæ KH esse minorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium ST, PR, NQ, MO, KL, HI portionibus curva ipsa minor erit.

*Diēst
hoc loco
figura
3. quant
ad cal-
cem li-
bri le-
ctor in-
veniet.*

Cum autem ex corollario propositionis primæ partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrinque productarum & portionibus basis hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales: patet, cum 2. & 3. Figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripsérimus, tangentem ST tertiæ figuræ æqualem esse tangenti PV secundæ figuræ, cum enim punctum S in tertia figura idem omninò sit cum puncto P secundæ figuræ & portiones basis AB, BC in utraq; figura sint inter se æquales; portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum nempe recta ST in 3. figura & recta PV in 2. inter se æquales erunt. Probabitur similiter tangentem PR 3. figuræ æqualem esse tangenti TZ 2. & sic de cæteris. Quo peracto constabit primam tantùm 2. figuræ & ultimam 3. nulli ex portionibus figuræ contrariæ æquales esse. Excessus igitur quo figura secunda superat tertiam est idem quo tangens AQ 2. figuræ superat tangentem IH 3. figuræ. Sed recta IH propter parallelas æquatur portioni basis FG sive AB, supponuntur enim omnes basis portiones

æquales in utraque figura, ergo figura secunda ex tangentibus curva majoribus composita superat figuram tertiam ex tangentibus curva minoribus compositam eo ipso quo in 2. figura tangens AQ superat portionem basis AB , ipsi oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curva, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio: Cum enim ex methodo tangentium jam cognita detur tangens ad punctum A , dabitur angulus QAB , sed angulus QBA est rectus, ergo datur triangulum QAB , specie, datur itaque ratio rectæ AQ ad AB . Cavendum itaque est ut divisio basis ita instituat ut differentia rectarum AQ & AB sit minor quacumque recta data, Quod ita assequemur si quæramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant recta data quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, & curandum deinde ut portio quælibet basis AB non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Cum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvâ quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, à fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, & minor ex circumscriptis superabitur à curva intervallo adhuc minore.

Patet itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam cum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse & demonstrasse sufficiet.

His positis securè pronuntio inveniri posse curvam verè Geometricam datæ rectæ æqualem. Ea verò est una ex infinitis parabolis, quas olim speculati sumus; illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis, de quo ne dubitent Geometræ ita breviter demonstro.

PROPOSITIO III.

SIT in 4. Figura parabolæ quam jam indicavimus $MIVA$ cujus vertex A , axis AN , & in qua sumpto quovis puncto I & ductis perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis MN , IF , cubus rectæ MN sit ad cubum rectæ IF , ut quadratum rectæ NA ad quadratum rectæ FA , idque semper contingat: probandum est curvam MIA rectæ datæ æqualem esse. Fiat ut quadratum axis AN , ad quadratum applicatæ NM , ita recta NM ad rectam AD ipsi AN perpendicularem. Patet rectam AD esse rectum dictæ parabolæ latus; hoc est solidum sub AD in quadratum rectæ AN æquari cubo applicatæ NM , item sumpto quovis alio puncto ut I , solidum sub AD in quadratum AE æquari cubo applicatæ IF , quod non eget demonstratione, in facilibus enim non immoramur: ducatur tangens ad punctum I , & sit illa IOE quæ cum axe AN in puncto E concurrat. Ex methodo tangentium constat rectam FA , rectæ AE esse duplam, ideòque rectam FE ad rectam AF esse ut 3. ad 2. quadratum verò rectæ EF esse ad quadratum rectæ AF ut 9. ad 4. à recta AD abscindatur nona ipsius pars CD , & reliqua CA bisecetur in B , erit igitur DA ad AB ut 9. ad 4. sive ut quadratum EF ad quadratum AF . Solidum itaque sub AD in quadratum AF æquale erit solido sub quadrato FE in rectam AB . Sed solidum sub AD in quadratum AF est æquale cubo rectæ IF , ergò solidum sub rectâ AB in quadratum EF est æquale eidem cubo rectæ IF ; est ergò ut quadratum EF ad quadratum IF ita recta IF ad rectam AB , & componendo summa quadratorum EF & FI , hoc est unicum quadratum tangentis IE est ad quadratum IF , ut summa rectarum IF & AB ad AB .

Si autem ducatur à puncto I perpendicularis ad basim recta IH & alia quævis perpendicularis $GQVO$ occurrens applicatæ IF in Q : curvæ in V & tangenti in O , propter similitudinem triangulorum erit ut IO ad IQ sive ipsi æqualem HG , ita tangens IE ad applicatam IF , & ut quadratum IO ad quadratum HG ita quadratum IE ad quadratum IF .

Sed ut recta HK ad rectam IK ita singulis in rectam KL ductis rectangulum sub HK in KL ad rectangulum sub IK in KL ; rectangulum verò sub HK in KL ex natura parabolæ Archimedæ æquatur quadrato applicatæ HN , & rectangulum sub IK , in KL æquatur quadrato rectæ KL , cum rectæ IK , KL factæ fuerint æquales: Erit igitur ut quadratum HN ad quadratum KL ita quadratum tangentis ZU ad quadratum rectæ HI , ideòque ut recta HN ad KL ita tangens ZU ad rectam HI . Similiter probabimus esse ut tangentem YT ad rectam GH ita applicatam GO ad KL : Item ut tangentem XS ad rectam FG ita applicatam FP ad KL , denique ut tangentem ER , ad rectam EF ita esse applicatam EQ ad KL . Cum igitur sit ut tangens ZU ad rectam HI ita applicata HN ad KL , rectangulum sub extremis æquabitur rectangulo sub medijs, ideòque rectangulum sub NH in HI æquabitur rectangulo sub KL in tangentem ZU . Similiter rectangulum sub OG in GH æquabitur rectangulo sub KL in tangentem YT , item rectangulum sub PF in FG æquabitur rectangulo sub KL in tangentem XS , denique rectangulum sub EQ in EF æquabitur rectangulo sub KL in tangentem ER : Quid autem pluribus in re proclivi & jam ad methodum Archimedæam sponte sua vergente immoramur? Per inscriptas enim & circumscriptas in segmento parabolico figuras, rectangula omnia QEF , CFG , OGH , NHI segmentum ipsum parabolicum $EQMI$ designabunt. Omnes autem tangentes ER , XS , YT , ZU per iteratam secundum nostræ præcepta methodi circumscriptionem curvam ipsam $EXYZA$ etiam designabunt; ergo segmentum parabolicum $EQMI$ æquatur rectangulo sub KL in curvam EXA . Datur autem in rectilineis segmentum parabolicum $EQMI$, quadravit enim parabolam Archimedes ideòque ipsius segmenta. Ergo rectangulum sub KL in curvam EXA etiam datur: datur autem recta KL . Ergo datur curva EXA & ipsi alia recta potest constitui æqualis, quod erat demonstrandum.

Si quibusdam tamen hæc demonstratio brevitatem nimiam laborare videatur, eam integram insistendo vestigijs Archimedæis non gravamur separatim adjungere, ut eam legant & examinent qui superiora non sufficere existimabunt. Probandum est segmentum parabolicum $EQMI$ rectangulo sub datâ KL in curvam EXA æquale esse. Fiat ex Archimede segmentum illud parabolicum $EQMI$ æquale rectangulo sub datâ rectâ KL in datam rectam B . Si probaverimus rectam B æqualem esse curvæ EXA constabit propositum. Aio itaque rectam B curvæ EXA esse æqualem. Si enim æqualis non est, erit vel major vel minor. Sit primò recta B major quàm curva EXA & sit earum excessus, si fieri possit recta Δ . Ex propositione secundâ hujus possumus curvæ EXA circumscribere figuram ex portionibus tangentium compositam quæ superet curvam intervallo minore rectâ Δ . Fiat igitur illa circumscriptio & in figura separata, quam etiam quintam Romano charactere notauimus, circumscripta illa constet ex portionibus tangentium ER , XS , YT , ZV , circumscripta illa ex prædemonstratis est major curvâ EXA . Sed & recta B posita est major eadem curva. Cum ergo circumscripta superet curvam minori intervallo quàm recta B superat eandem curvam: Ergo circumscripta minor est recta B . Rectangulum itaque sub rectâ KL in circumscriptam est minus rectangulo sub KL in rectam B . At rectangulum sub KL in B factum est æquale segmento parabolico $EQMI$: Ergo rectangulum sub KL , in circumscriptam est minus dicto segmento parabolico $EQMI$. Probavimus autem rectangulum sub KL in portionem tangentis ER æquari rectangulo sub QE in EF , item rectangulum sub KL in XS æquari rectangulo sub PF in FG , item rectangulum sub KL in YT æquari rectangulo sub OG in GH , denique rectangulum sub KL in ZV æquari rectangulo sub NH in HI , ergo rectangulum sub KL in totam circumscriptam est æquale summæ rectangulorum sub QE in EF , sub PF in FG , sub OG in GH & sub NH , in HI . Si autem in rectas FP , GO , HN , IM , quæ sensim decrescunt quò propius accedunt ad verticem parabolæ, continuatas demittantur

perpendiculares seu parallelæ basi, à punctis Q, P, O, N rectæ Q_r, P_o, O_l, N_φ. Patet rectangulum QEF r æquale esse rectangulo sub QE in EF, item rectangulum o F, æquari rectangulo sub PF in FG, rectangulum l G æquari rectangulo sub O G in GH, denique rectangulum φ H æquari rectangulo sub NH in HI. Ergo rectangulum sub KL in circumscriptam est æquale

rectangulis o E, o F, l G, φ H. Sed probavimus rectangulum sub KL in circumscriptam esse minus segmento parabolico EQMI, ergo summa rectangulorum rE, oF, lG, φH erit minor dicto segmento parabolico EQMI, quod est absurdum, illa enim rectangula constituunt figuram ex rectangulis compositam, & segmento parabolico, ut patet, circumscriptam, ideòque ipso segmento majorem. Recta itaque B non est major curvâ EXA. Sed neque minorem esse probabimus. Sit enim recta B minor curvâ EXA, si fieri potest, & curva superet rectam B intervallo Δ. Circumscribatur in figurâ separatâ (quam etiam quintam caractere græco notavimus) figura constans ex portionibus tangentium curvâ EXA minorum; sed quam tamen ipsa curva superet intervallo minore ipso Δ. Et sit illa figura constans ex portionibus tangentium XR, YS, ZT, AV; Cum itaque curva sit major B intervallo Δ, & eadem curva superet circumscriptam intervallo minore ipso Δ, ergo circumscripta erit major rectâ B, ideòque rectangulum sub KL in circumscriptam erit majus segmento parabolico EQMI. Sed rectangulum sub KL in circumscriptam æquatur, ex prædemonstratis, rectangulis sub PF, in FE, sub OG, in GF, sub NH in HG & sub MI in IH. Est enim ut XR ad FE ita FP ad KL, ideòque rectangulum sub KL in XR æquatur

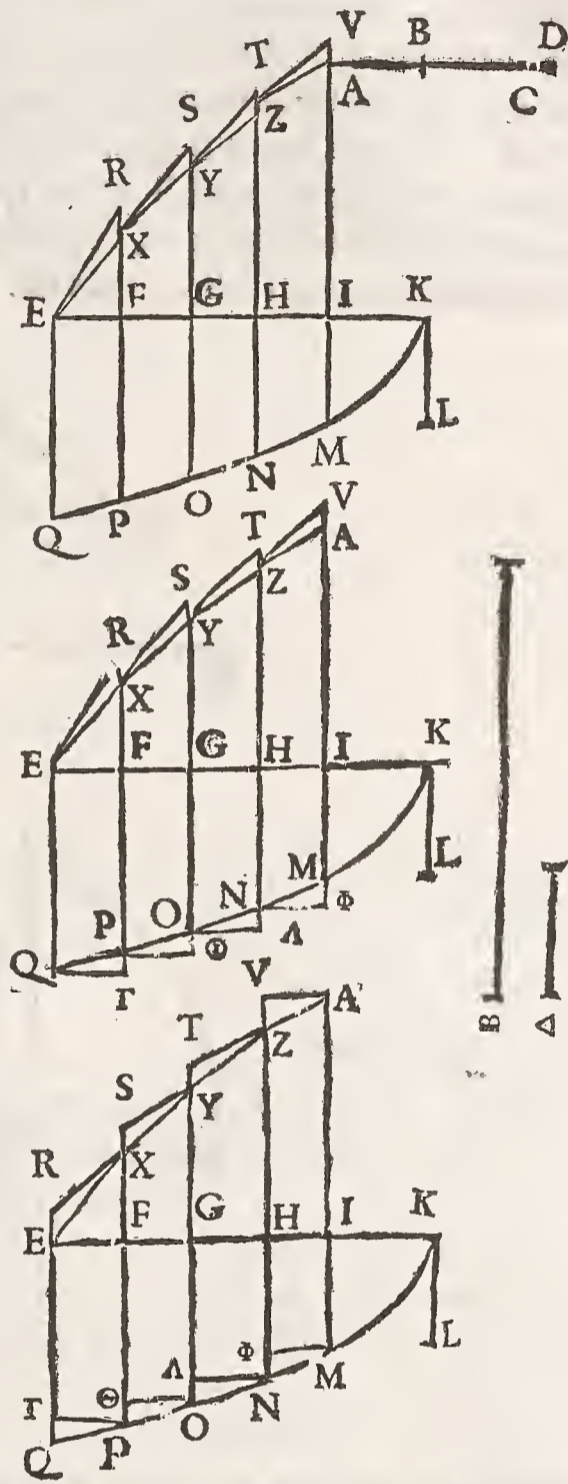


Figura 5.

σχῆμα 5.

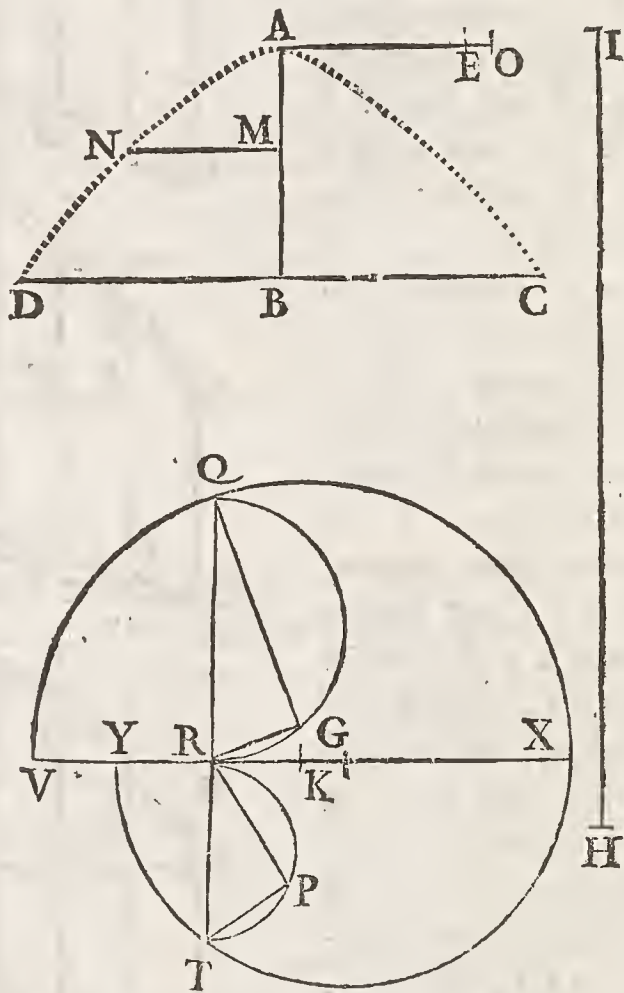
rectangulo sub PF in FE & sic de reliquis. Cum igitur rectangulum sub KL in circumscriptam sit majus segmento parabolico EQMI, ergo summa rectangulorum sub PF in FE, sub OG in GF, sub NH in GH & sub MI in HI est major dicto segmento parabolico, sed omnia illa rectangula ductis perpendicularibus seu basi parallelis rectis Pr, Oo, Nl, Mφ quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam, prout enim applicatæ magis distant à vertice eò magis semper augentur, erunt æqualia rectangulis PE, OF, NG, MH. Ergo summa omnium illorum rectangulorum PE, OF, NG, MH, erit major segmento parabolico. Quod est absurdum. Rectangula enim illa PE, OF, NG, MH componunt figuram ex rectangulis compositam & ipsi segmento parabolico inscriptam, ideòque ipso minorem. Recta itaque B non est minor curvâ EXA. Cum igitur nec sit major, nec minor, erit ipsi curvæ æqualis. Quod prolixius, ut omnis removeatur scrupulus, fuit demonstrandum.

Ex jam demonstratis patet eadem facilitate demonstrari posse segmentum parabolicum quodvis EQPF à priore abscissum, rectangulo sub datâ KL in curvam EX

æquale esse ; Ideóque si detur in basi quodvis punctum ut F , cum ex Archimede segmentum parabolicum $E Q P F$ in rectilineis detur , dari etiam & rectangulum sub $K L$ datâ in portionem curvæ $E X$; datur autem recta $K L$, ergo & curva $E X$. Dato itaque quovis puncto in basi se ut F , dari portionem curvæ ipsi oppositam & rectam posse assignari huic æqualem manifestum est.

Nec moveat ad rectam illam curvæ $E X A$ æqualem inveniendam , construendam videri parabolam simplicem , quo casu problema solidum evaderet. Cùm enim supponatur ad veritatem tantùm inquirendam & demonstrationem ritè conficiendam parabolæ illius descriptio ; nihil vetat quominus calculum ipsum dissimulatâ illa imaginaria parabolæ descriptione , per rectas & circulos & expediamus & exhibeamus. Is autem calculus , nisi fallor , talis est. Est in figurâ sexta , curva parabolica $D A C$

Figura 6.



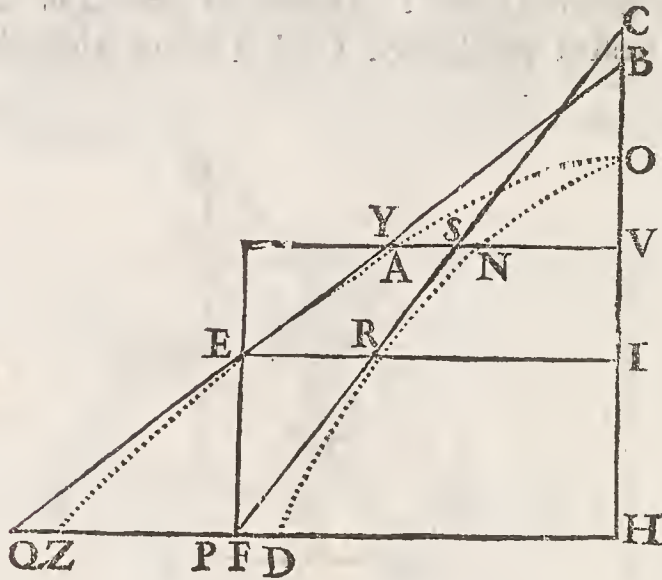
ejus naturæ ut cubi applicatarum DB & NM sint inter se ut quadrata portionum axis BA & AM , dentur autem altitudo AB & semibasis BD , aut tota DBC . Aio dari rectam curvæ DAC æqualem (quod jam probatum est) in calculo verè Geometrico. Sit rectum istius parabolæ latus recta AO , quam datam esse ex datis axe & applicata ex suprâ dictis constat , à recta AO auferatur nona ipsius pars EO , reliqua verò AE fiat æqualis rectæ YK , cui in directum ponatur KX æqualis seu applicatæ semibasi DB . Super recta YX tanquam diametro describatur semicirculus YTX & rectâ YK bisectâ in puncto R excitetur perpendicularis RT semicirculum secans in T , Rectæ RT fiat æqualis recta RV & super recta VX tanquam diametro describatur semicirculus VQX ad cujus circumferentiam à puncto R excitetur perpendicularis RQ . Super rectis TR , RQ describantur semicirculi TPR , $R G Q$ & ipsis applicentur rectæ TP , RG quæ singulæ sint ipsi RY æquales. Junctis autem rectis RP , QG : Aio rationem curvæ parabolice DAC ad basim DBC esse eandem quæ est dupli quadrati rectæ QG ad triplum quadratum rectæ RP ideóque esse datam. Fiat itaque ut triplum quadratum rectæ RP ad duplum quadratum rectæ QG ita recta DC ad

ad

PROPOSITIO VI.

ESto in Fig. 8. quælibet curva ejusdem cum præcedentibus naturæ ONR , cujus vertex O , axis vel applicata OVI , eadem enim semper est demonstratio, & ab eâ

Figura
8.



formetur alia curva OAE cujus ea sit proprietas ut applicatæ sint æquales portionibus abscissis à priore curvâ, exempli gratiâ, applicata VA sit æqualis curvæ ON , applicata IE sit æqualis curvæ OR , & sic de reliquis: Ad datum punctum in novâ hâc curvâ ducetur tangens hoc pacto: Sit datum punctum E , ducatur applicata EI , secans priorem curvam in R , ducatur recta RC tangens in dicto puncto R priorem curvam & occurrens axi in puncto C , fiat ut RC ad CI , ita recta IE ad rectam IB , & jungatur EB . Aio rectam EB tangere novam curvam EOA in puncto E . Sumpto enim quovis puncto in axe ut V , & ducta applicata VNA quæ secet priorem curvam in N , tangentem RC in S , secundam curvam in A , rectam verò EB in Y , si probaverimus rectam VY semper esse majorem applicatâ VA , recta EB non secabit novam curvam à parte verticis. Hoc autem facillimè probamus. Recta VA est æqualis curvæ ON sive differentiæ inter curvas OR , NR : At recta RS est minor curvâ RN per consuetarium primæ propositionis, ergo differentia inter curvam OR & rectam RS est major differentia inter eandem curvam OR , & curvam RN ; sed curva VY est æqualis differentiæ inter curvam OR & rectam RS ut mox probabimus ergo recta VY occurrens rectæ EB , erit major rectâ VA occurrente curvæ EOA , unde patet omnia puncta rectæ EB versùs verticem esse extra curvam; ideòque recta EB curvam ab eâ parte non secabit. Imò nec inferiùs. Sumatur enim quodvis punctum ut H à quo ducatur applicata HZ secans priorem curvam in D , tangentem RC productam in F , secundam curvam in Z , & rectam EB productam in Q . Si probemus rectam HQ in quocumque casu majorem esse rectâ HZ , patebit omnia puncta rectæ EB etiam inferiùs sumpta extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam EB tangere secundam curvam in dicto puncto E . Recta HZ est æqualis ex constructione curvæ OD , hoc est summæ curvarum OR , RD . Cum autem recta RF sit portio tangentis RE inferiùs sumpta erit ex consuetario primæ hujus recta RF major curva RD , ideòque summa curvæ OR & rectæ RF erit major summa, ejusdem curvæ OR & curvæ RD ; summa autem curvæ OR & rectæ RF est æqualis, ut mox probabimus, rectæ HQ ; summa verò curvarum OR , RD est æqualis rectæ HZ ex constructione, ergo recta HQ semper & in omni casu major erit applicatâ HZ . Ideòque recta EB in dicto puncto E tanget secundam curvam. Probandum

FI est ut recta FE unâ cum AB ad AB, & componendo quadrata duo NF & FI si-
ve unicum quadratum NI erit ad quadratum FI ut FE unâ cum AB bis ad AB. Sed
ut quadratum NI ad quadratum FI, ita quadratum RN ad quadratum rectæ FV ex
una parte, & ita quadratum rectæ NX ad quadratum rectæ FY ex altera. Ergo sum-
pto quovis puncto in secunda hac curva ut N, est semper ut quadratum portio-
nis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte ad quadratum portio-
nis basis ipsi oppositæ, ita summa rectæ FE unâ cum AB bis ad AB. Si igitur basi GE ponatur in
directum recta EO rectæ AB dupla, & ad punctum O erigatur perpendicularis OP
ipsi AB æqualis, erit semper ut quadratum portio-
nis NR in hac secundâ curvâ ad
quadratum portio-
nis basis FV, vel ut quadratum portio-
nis tangentis NX ad quadra-
tum portio-
nis basis FY, ita recta FO ad rectam OP.

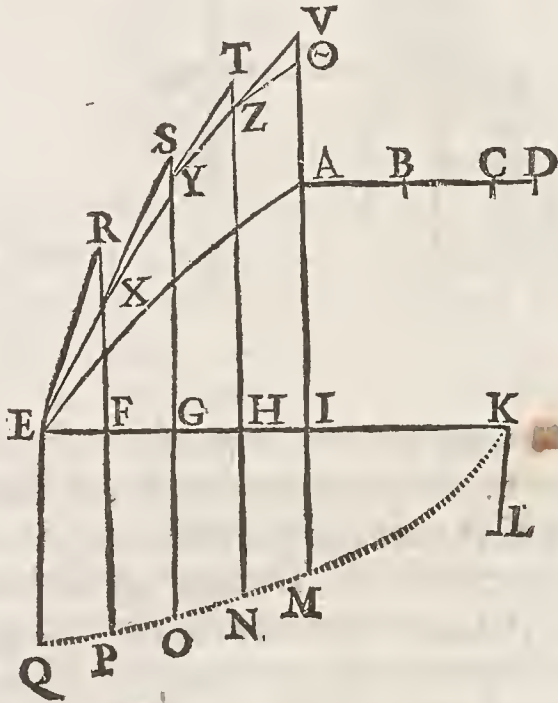
His ita se habentibus, patet cæteras in infinitum curvas modo quem supra indi-
cavimus describendas ejus esse naturæ, ut in 3. v. g. quadratum portio-
nis tangentis ad
quadratum portio-
nis basis ipsi oppositæ, sit ut portio basis FE initium sumens à pun-
cto F in quod cadit perpendicularis à puncto contactus in basim demissa, unâ cum re-
ctâ AB ter sumptâ ad ipsam AB. In quartâ curvâ erit ut quadratum portio-
nis tangentis ad quadratum portio-
nis basis ipsi oppositæ ut recta FE unâ cum AB quater sum-
pta ad ipsam AB. Et sic de reliquis in infinitum. Eadem enim semper demonstratio,
ut evidens est, in omnibus casibus locum habet.

Nec difficilis hoc supposito ad theorema generale erit aditus.

PROPOSITIO VII.

E Sto in Fig. 10. curva nostra parabolica EA, cujus axis AI, semibasis IE. ab
eâ formetur secunda curva EXYZ \odot cujus ea sit natura, ut supra diximus, ut

Figura
10.



quævis applicata FX sit æqualis portio-
ni prioris curvæ ab applicata illa, seu mavis
vocare perpendicularem, abscissæ. Dividatur basis in quotlibet partes æquales EF,
FG, GH, HI & ducantur à punctis F, G, H, perpendiculares secantes novam hanc
secundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus AD, à quo
abscindatur nona pars CD, & reliqua AC bifecetur in B. Rectæ AB bis sumptæ fiat
æqualis recta IK quæ sit in directum basi, & ad punctum K erigatur perpendicularis
KL æqualis rectæ AB. Per punctum K & axem KE intelligatur describi parabola sim-

secunda curva semper æqualis portioni primæ curvæ $A O$, item recta $D G$ in tertia curva sit semper æqualis portioni secundæ curvæ $A I$, & sic in infinitum. Hujusmodi omnes curvæ non solum specie inter se & à prima $A O C$, different sed etiam ab ijs quas ex parte basis suprâ effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes $A I F$, $A G E$ &c. sic in infinitum effingendæ, datis rectis, an verò alijs curvis sint æquales? Inquirant illud Geometræ, & miraculum augeri experientur.

Sanè si methodi quibus utuntur ad dimensionem curvarum, sint generales & sufficientes, quod ipsis affirmantibus in dubium revocare non ausim, primo statim obtutu rem factam habebunt, & à labore superfluo Geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in superioribus demonstrationibus concisum nimis invenerint, id aut suppleant, rogo, aut condonent.





APPENDIX

AD DISSERTATIONEM

DE LINEARUM CURVARUM

cum lineis rectis comparatione.

*Ut ultimæ quam in Dissertatione proposuimus quæstioni
satisfiat, præmittendæ videntur propositiones sequentes.*

PROPOSITIO PRIMA.



INT in figurâ primâ duæ curvæ AIF, 3 Z 8 quarum axes A E, 3 7 sint inter se æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ in utrâque figurâ æquali à vertice intervallo distent. Sint exempli gratiâ applicatæ prioris B M, C I, D H, E F: posterioris verò applicatæ sint 4 t; 5 2; 6 9, 7 8, & sit recta A B quæ designat intervallum applicatæ B M à vertice, æqualis recta 4 3 quæ designat intervallum etiam applicatæ 4 t à vertice. Sit pariter CA æqualis 5 3. Item D A æqualis 6 3, denique E A, quod jam supposueramus, æqualis 7 3: Si singulæ ex applicatis sint semper ad abscissas per tangentes ab axe, in ratione correlatarum, hoc est si ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M, ex unâ parte, & ad puncta 8, 9, Z, T, ex alterâ semper contingat ut applicata F E, verbi gratia, sit ad rectam K E quam tangens F K abscindit ab axe, in eadem ratione, quæ est applicatæ 8 7 ad rectam 7 2 quam tangens 8 2 ab axe pariter abscindit. Item applicata D H sit ad abscissam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 6 9 ad abscissam ab axe per tangentem ad punctum 9. ductam & sic de reliquis. Aio duas istas curvas A F, 3 z 8. esse inter se æquales, imò & similes ideóque easdem, & applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ à vertice æqualiter distant esse pariter æquales. Ductis enim ad puncta H, I, ut in primâ figurâ portionibus tangentium HO. I N, M R, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R. Item ductis portionibus tangentium in secundâ figurâ 9 V, Z Y, T X quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X: ex suppositione ut F E ad E K in primâ figurâ, ita est 8 7 ad 7 2 in secundâ: sed anguli ad puncta E & 7 sunt recti, ergo triangula F E K, 8 7 2 sunt similia: ut ergo F K ad K E, ita 8 2 ad 7 2. Sed ut F K ad K E ita (productâ applicatâ D H ad punctum G) recta F G ad rectam D E, & ut 8 2 ad 7 2 ita (productâ applicata 6 9 ad punctum P) recta 8 P ad 6 7. Ergo ut recta F G ad rectam D E, ita recta 8 P ad 6 7. Sunt autem rectæ D E,

67, æquales, cum rectæ EA & 73, item rectæ DA & 63 sint inter se æquales: ergo & portiones tangentium FG, 8P erunt inter se æquales. Similiter probabimus portionem tangentis HO æqualem esse portioni tangentis 9V, item portionem tangentis IN æqualem esse portioni tangentis ZY, denique portionem tangentis MR æqualem esse portioni tangentis TX. Cum ergo series tangentium in primâ figurâ sit æqualis seriei tangentium in secundâ per abductionem ad impossibile more Archimedeo facile concluditur curvam AIF, curvæ 3Z8 æqualem esse, quod primo loco fuit probandum, imò & pariter concluditur portiones curvæ correlatas esse inter se æquales, portionem nempe FH portioni 89, portionem curvæ HI portioni 9Z, & sic de reliquis. Superest probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius esse æquales. Cum ex suppositione applicatæ sint semper ad abscissas ab axe per tangentes in eadem utrobique ratione, ergo anguli GFE, P87 qui fiunt ab intersectione tangentium & applicatarum erunt inter se æquales: Item anguli OHD, & V96: Item anguli NIC, & YZ5: Denique anguli RMB, & XT4. Cum ergo portiones omnes prioris curvæ FH, HI, IM, MA, sint æquales portionibus posterioris 89, 9Z, ZT, T3 singulæ singulis, imò & earundem portionum sit eadem utrobique inclinatio (inclinacionem enim curvarum metiuntur tangentes quæ in utrâque figurâ æquales semper, ut probavimus, conficiunt angulos) ergo curvæ AMIH F, 3TZ98, non solum sunt inter se æquales, sed etiam similes: Undè si intelligantur altera alteri superponi, congruent omninò, ideòque non solum axes sed applicatas æquales aut easdem potius habebunt. Quod secundo loco fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Sint duæ in secundâ figurâ parabolæ ejusdem naturæ AOD, XIG, quarum axes sint AC, XF, semibases DC, GF, & sit verbi gratia ut cubus DC ad cubum applicatæ BO, ita quadratum CA ad quadratum BA: & similiter ut cubus GF ad cubum applicatæ IY, ita quadratum FX ad quadratum IX. (Licet enim propositio sit generalis à parabolâ nostrâ non discedimus) sit autem ut axis unius ad semibasem, ita etiam axis alterius ad semibasem nempe ut axis CA ad semibasem DC, ita axis XF ad semibasem GF. Aio duas hasce parabolæ esse inter se in ratione axium, vel semibasium, hoc est curvam AOD esse ad curvam XIG ut est axis AC ad axem XF, vel ut semibasis CD ad semibasem GF. Hæ quippe duæ rationes ex suppositione sunt eadem. Demonstratio est in promptu. Secetur enim uterque axis in quotlibet partes æquales, duas tantum ad vitandam confusionem & prolixitatem assumemus. Secetur ergo bifariam axis AC, in B, & axis FX in Y, & ductis applicatis BO, YI ducantur ad puncta D, O, tangentes DN, OM quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, posterior verò rectæ AV applicatis parallelæ in puncto V. Item in altera figura ducantur ad puncta G, I, tangentes GK, IS, occurrentes applicatæ YI & ipsi parallelæ XR in punctis H, R: ex suppositione est ut DC ad CA, ita GF ad FX. Sed ex natura istius parabolæ recta CA est ad CN abscissam per tangentem ut 2. ad 3. Item recta FX est etiam ad rectam FK per tangentem abscissam ut 2. ad 3. Ergo ex æquo est ut DC ad CN ita GF ad FK. Sunt ergo æquiangularia triangula DNC, GKF. Ergo ut DN, ad NC, ita GK ad KF. Sed ut DN ad NC, ita DE ad CB, & ut GK ad KF, ita GH ad FY. Ergo ut DE ad CB, ita GH ad FY. Similiter probabitur esse ut OV ad BA, ita IR ad XY. Cum ergo portiones axium AB, BC ex una parte, & XY, YF ex altera sint inter se æquales, ergo ut omnes tangentium portiones DE, OV ad totum axem AC, ita omnes tangentium portiones GH, IR ad totum axem XF. Omnes autem portiones tangentium DE, & OV & plures, si opus sit, beneficio abductionis ad impossibile ut jam sæpiùs & indicatum & probatum est designant totam curvam DOA: Item omnes portiones tangentium GH, IR, & plures etiam, si opus

Figura
2.

fit, designant totam curvam GIX . Ergo ut curva DOA ad axem AC , ita curva GIX ad axem XF : Et vicissim & convertendo, erit axis AC ad axem XF : sive basis DC ex suppositione ad basim GF , ut curva DOA ad curvam GIX . Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Figura
3.

ESto in 3. Figura curva AO cujus axis AC , basis CO , & ab ea intelligatur formari alia curva ejusdem & axis & verticis in qua applicatae sint semper in ratione applicatarum prioris curvae, sit nempe ut basis CO , ad basim CV , ita applicata BP prioris curvae, ad applicatam BR posterioris curvae, & ita applicata DE ad applicatam DN & sic in infinitum. Si ad punctum quodlibet prioris curvae ut O ducatur tangens OH cum axe conveniens in puncto H , & continuetur CO , donec occurrat secundae curvae in V . Aio rectam quae puncta V & H conjungit tangere secundam curvam, & semper contingere ut tangentes correlatae in utraque curva ad idem punctum axi occurrant. Ducantur enim applicatae BP , DE , N , occurrentes curvis in punctis P , R , E , N , & rectis OH , VH productis, in punctis Q , S , F , M . Si probaverimus rectam BS supra rectam CV ductam semper majorem esse rectam BR : item rectam DM inferius ductam esse etiam semper majorem applicatam DN , patebit rectam $MVSH$ tangere secundam curvam in puncto V . Ex constructione ut CO ad CV , ita est applicata BP ad applicatam BR . Sed propter parallelas COV , BQS quae secantur a tribus rectis CH , OH , VH ad idem punctum vergentibus, est etiam ut CO ad CV ita recta BQ ad rectam BS , ergo ut recta BP ad rectam BR , ita est recta BQ ad rectam BS , & vicissim ut recta BP ad rectam BQ , ita est recta BR ad rectam BS . Cum autem recta OQH tangat priorem curvam in puncto O , recta BQ erit major recta BP , ergo etiam recta BS erit major recta BR . Quod primo loco fuit probandum. Nec dissimilis in applicata inferius sumpta erit demonstratio. Ex suppositione enim est ut CO ad CV , ita DE ad DN , & propter parallelas est etiam ut CO ad CV , ita DF ad DM , ergo ut DE ad DN ita est DF ad DM ; est autem DE minor DF , ergo & DN ipsa DM minor erit. Recta itaque $MVSH$ in puncto V tangit secundam curvam.

Lemma ad id quod sequitur.

Figura
4.

SIT in 4. figura, parabole nostra GIA cujus axis AE , semibasis EF tangens GH . Constituaturs ad eundem axem AE alia parabole ejusdem naturae FNA cujus semibasis EF sit potestate subdupla prioris semibasis EG , & semper contingat applicatam quamvis, ut NO , applicatae OI ad priorem curvam esse pariter potestate subduplam, Sit rectum prioris GIA paraboles latus recta AD , cujus nona pars sit CD , & reliqua AC bifecetur in B . Ducatur ad secundam parabolam tangens ad punctum F recta FH . quae in eodem puncto H cum axe conveniet non solum ex vi propositionis praecedentis, sed quia ex natura istarum parabolarum, in utraque, recta EA est ad rectam EH ut 2 ad 3. ex superius demonstratis. Aio quadratum FE esse ad quadratum EH ut est dimidia rectae AB ad rectam EG . Jam enim in propositione tertiae dissertationis demonstratum est quadratum GE esse ad quadratum EH ut est recta AB ad rectam EG . Ergo sumptis antecedentium dimidiis erit ut quadratum EF quod supposuimus esse dimidium quadrati GE , ad quadratum EH , ita dimidia rectae AB ad rectam GE . Probabimus pariter si recta FE sit potestate subtripla rectae GE , hoc est si quadratum FE sit subtripulum quadrati GE , esse ut quadratum FE ad quadratum EH , ita tertiam partem rectae AB ad rectam GE . Et sic de subquadruplo subquintuplo & reliquis in infinitum. Cum autem in ratione subdupla probaverimus esse ut quadratum EF ad quadratum EH ita dimidiam AB ad rectam GE ,

ergo componendo erit ut summa quadratorum FE , EH , sive ut unicum quadratum FH ad quadratum EH , ita dimidia AB unà cum GE , ad ipsam GE .

Si verò recta EF sit potestate subtripla rectæ GE , erit ut quadratum FH ad quadratum EH , ita tertia pars AB unà cum GE ad ipsam GE .

Si recta EF sit potestate subquadrupla rectæ GE , erit ut quadratum FH ad quadratum EH , ita quarta pars AB unà cum EG ad ipsam EG , & sic in infinitum, & in quacumque applicata idem continget.

PROPOSITIO IV.

HIS præmissis theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit in figura 5. parabole nostra AC cujus axis AB , semibasis BC , & ab ea *Figura* formentur aliæ in infinitum curvæ AD , AE , AF quarum ea sit proprietas ut ducta *5.* qualibet applicata $BCDEF$, recta BD sit semper æqualis priori curvæ CA , recta BE æqualis secundæ curvæ AD , recta BF æqualis tertiæ curvæ AE , idque semper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat. Aio omnes illas & singulas in infinitum curvas AD , AE , AF &c. esse semper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in dissertatione, diversa & dissimili ex parte basis methodo construximus.

Theorema generale ita se habet. Exponatur separatim eadem parabole O_3M æqualis omninò & similis ipsi AC , cujus ideo axis MN æqualis est axi AB , & semibasis ON , semibasi BC . Separatim enim ad vitandam confusionem figuram construendam duximus. Fiat recta NP rectæ NM potestate dupla, recta NQ ejusdem NM potestate *Figura* tripla, recta NR ejusdem NM potestate quadrupla, & sic in infinitum. Manente *6.* autem eadem semibasi ON , construaturs parabole per vertices P , Q , R ejusdem cum parabola O_3M vel AC naturæ, & sint illæ O_4P , O_5Q , O_6R &c. Aio parabolam O_4P curvæ AD esse æqualem; parabolam verò O_5Q curvæ AE esse æqualem, denique parabolam O_6R curvæ AF esse æqualem, & sic in infinitum. Cum in nostris parabolis O_4P , O_5Q , O_6R ducta applicata 23456 , sit semper ex natura dictarum parabolæ ut cubus rectæ ON ad cubum rectæ 42 ita quadratum rectæ sive axis NP ad quadratum $P2$: item ut cubus ON ad cubum 52 ita quadratum NQ ad quadratum $Q2$: denique ut cubus ON ad cubum 62 ita quadratum NR ad quadratum $R2$. Patet ex prædemonstratis in dissertatione, singulas ex istis parabolis, rectis datis æquales esse, ergo post demonstrationem theorematis nostri generalis constabit singulas quoque ex curvis AD , AE , AF rectis datis æquales esse.

Demonstratio autem theorematis generalis hæc est. Sit rectum paraboles istius latus recta AS , à qua si demas nonam partem SY , reliquam biseca in puncto V & ad puncta C , D , E ducantur tangentes ad novas curvas CI , DH , EG quæ occurrant axi in punctis I , H , G . Ex demonstratis in tertia dissertationis propositione quadratum BC est ad quadratum BI ut recta AV ad rectam BC . Et componendo quadratum CI est ad quadratum BI ut recta AV unà cum BC ad BC . Sed ex propositione sexta Dissertationis, ut est quadratum tangentis CI ad quadratum BI , ita quadratum rectæ BD se habet ad quadratum rectæ BH , quam abscindit tangens DH : Ergo ut quadratum BD ad quadratum BH , ita recta AV unà cum BC ad BC : Et componendo ut quadratum tangentis DH ad quadratum BH , ita recta AV unà cum BC bis sumptâ ad ipsam BC . Sed ut quadratum tangentis DH , ad quadratum HB , ita ex eadem dissertationis propositione quadratum BE est ad quadratum rectæ BG à tangente EG abscissæ: ergo ut quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ BG , ita est recta AV unà cum BC bis sumpta, ad ipsam BC . Similiter probabitur si ducatur ad curvam EA applicata ZTK , secans curvam AC in T , & intelligatur ad punctum K duci, tangens ad curvam AK , esse pariter ut quadratum KZ ad quadratum rectæ, quam

tangens per punctum K ducta ab axe abscindit, ita rectam AV unà cum ZT bis sumpta ad ipsam ZT . Et sic semper continget.

Exponatur separatim ad vitandam confusionem eadem curva AKE , quæ sit in figura separata $B\Phi\Lambda$. Basis $\Lambda\Delta$ sit itaque æqualis basi EB , tangens $\Lambda\Gamma$ tangenti $E\Gamma$, axis ΔB axi BA ; abscissa per tangentem ab axe $\Delta\Gamma$, abscissæ $B\Gamma$; applicata $N\Phi$; applicatæ ZK . Ab hac curva $\Lambda\Phi B$ formetur alia ipsa minor $\Theta\Pi B$, eadem conditione: ut applicatæ novæ istius curvæ sint semper subduplæ potestate applicatarum prioris, verbi gratiâ recta $\Delta\Theta$ sit subdupla potestate rectæ $\Delta\Lambda$, item applicata $N\Pi$ sit subdupla potestate rectæ $N\Phi$; & sic de reliquis. Ducantur in hac nova curva tangentes ad puncta Θ, Π rectæ $\Theta\Gamma, \Pi\Gamma$. Ex præcedente tertia propositione patet tangentes $\Theta\Gamma, \Lambda\Gamma$, ad idem punctum Γ cum axe concurrere. Item tangentes ad puncta Φ, Π ductas ad idem etiam punctum, verbi gratiâ, Γ cum axe concurrere, cum applicatæ utriusque figuræ sint in eadem semper inter se ratione.

Exponatur adhuc separatim parabolæ ejusdem cum parabolis OM, OP &c. naturæ, cujus axi 98 sit æqualis axi MN , sive AB sive $B\Delta$; semibasis autem $8X$ sit subdupla potestate semibaseos NO , sive BC . Et sit illa $X119$, à qua formetur alia 912ψ , cujus idem sit axis 98 , applicata verò 8ψ sit æqualis curvæ $X119$: item applicata 101112 sit æqualis curvæ 119 ; & sic de reliquis.

Probandum primò curvas $\Theta\Pi B$ & $\psi129$, esse easdem, hoc est omninò æquales, & similes. Quod sic demonstrabitur. Probavimus quadratum BE esse ad quadratum $B\Gamma$, sive quadratum $\Lambda\Delta$ ad quadratum $\Delta\Gamma$, ut rectam AV unà cum CB bis sumpta ad rectam CB : Ergo sumptis antecedentium dimidiis, cum posuerimus rectam $\Theta\Delta$ esse potestate subduplam rectæ $\Delta\Lambda$, quadratum rectæ $\Theta\Delta$ erit dimidium quadrati $\Lambda\Delta$, ideòque ut quadratum $\Theta\Delta$ ad quadratum $\Delta\Gamma$, ita dimidia AV unà cum CB erit ad ipsam CB . Similiter probabimus in alia qualibet applicata ut ΠN , esse quadratum ΠN ad quadratum $N\Gamma$ ut dimidiam AV unà cum ZT ad ipsam ZT ; & sic de reliquis. Disquirendum jam an eadem proprietas curvæ $\psi129$ conveniat: quod ita fiet. In curva $X119$ cujus semibasis $X8$ est potestate subdupla semibasis BC , & axis 89 æqualis axi AB , ex lemmate superiori ductis tangentibus ad puncta X, ψ rectis $X\psi, \psi\Sigma$ quadratum $X8$ est ad quadratum $8P$ ut dimidia rectæ AV ad rectam CB (recta enim $X8$ est potestate subdupla rectæ CB) Ergo componendo quadratum $X\psi$ est ad quadratum $8P$, ut dimidia AV unà cum CB ad ipsam CB . Similiter si intelligatur recta 910 æqualis rectæ AZ , hoc est si puncta 10 & Z æqualiter à vertice distent, quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abscissæ ab axe, ut dimidia AV unà cum recta ZT ad ipsam ZT . Sed ut quadratum $X\psi$ ad quadratum $8P$, ita ex propositione sexta dissertationis est quadratum applicatæ $\psi8$ ad quadratum à tangente abscissæ 8Σ , & similiter ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ ad quadratum abscissæ ab axe, ita quadratum applicatæ 1210 ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam: Ergo ut quadratum $\psi8$ ad quadratum 8Σ , ita dimidia AV unà cum BC ad BC . Sed in alia figura probavimus quadratum applicatæ $\Theta\Delta$ esse ad quadratum abscissæ à tangente $\Delta\Gamma$, ut est dimidia AV unà cum BC ad CB : Ergo in duabus curvis $\psi129, \Theta\Pi B$ erit ut $\psi8$ ad abscissam 8Σ , ita applicata $\Theta\Delta$ ad abscissam $\Delta\Gamma$. Et in omnibus aliis punctis idem semper continget, & eodem modo probabimus, nempe applicatam, verbi gratiâ, 1012 , esse ad abscissam à tangente ad punctum 12 ducta, ut est ΠN ad $N\Gamma$, & sic de reliquis. Per primam itaque propositionem hujus appendicis cum curvæ $912\psi, \Theta\Pi B$, habeant eundem axem & applicatæ sint ad abscissas ab axe per tangentes, utrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curvæ erunt inter se æquales, & ipsæ etiam ipsarum semibases, & omnes similiter applicatæ à vertice æquidistantes. Ex constructione autem semibasis $\psi8$ est æqualis curvæ $X119$: Ergo curva $X119$ est æqualis rectæ $\Theta\Delta$. Recta autem $\Theta\Delta$ est potestate subdupla rectæ $\Delta\Lambda$ ex con-

structione: Ergo curva parabolica X 11 9 est potestate subdupla rectæ $\delta \lambda$: recta autem $\delta \lambda$ est æqualis rectæ B E, & recta B E supposita est in constructione curvarum à primaria A C derivatarum æqualis esse curvæ A D: Ergo parabola X 11 9 est subdupla potestate curvæ A D. Sed eadem curva X 11 9 est subdupla potestate parabolæ O 4 P; basis enim X 8 est facta potestate subdupla baseos B C sive N O, & similiter axis 8 9 sive A B, sive N M est potestate subduplus axis N P: Cum ergo parabolæ O 4 P, X 11 9 sint ejusdem naturæ, & tam axis quàm basis parabolæ X 11 9 sint potestate subduplæ axis & basis parabolæ O 4 P: Ergo & ipsa parabola X 11 9 ex propositione secunda hujus appendicis erit subdupla parabolæ O 4 P. Cum ergo ut jam probavimus eadem parabola X 11 9 sit subdupla tam parabolæ O 4 P, quàm curvæ A D; curva A D, & ipsa parabola O 4 P erunt inter se æquales; quod erat demonstrandum. Nec dissimili ad probandum curvam A E æqualem esse parabolæ O 5 Q, utendum artificio.

Cum enim quadratum B E esse ad quadratum B G ut est recta A V unà cum B C bis sumpta ad ipsam B C, probatum fuerit; ergo componendo & ulterius progrediendo erit quadratum tangentis E G ad quadratum rectæ B G, ut recta A V unà cum B C ter sumpta ad ipsam B C. Est autem ex prædemonstratis in sexta propositione dissertationis ut quadratum E G ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam: Ergo quadratum B F erit ad quadratum illius abscissæ ut est recta A V unà cum B C ter ad B C. In reliquis imitabimur omninò & sequemur vestigia demonstrationis præcedentis, nisi quod in figura separata postquam $\Lambda \Delta$ fuerit facta æqualis ipsi, B F, recta $\Delta \vartheta$ fiet subtripla potestate ipsius B F vel $\Delta \Lambda$; curva $\Lambda \Phi B$ curvæ F A fiet æqualis; curva $\theta \pi \beta$ ejus erit naturæ ut omnes applicatæ sequantur rationem basium $\Lambda \Delta \theta \delta$. In alia autem figura separata in qua curvæ 9 11 X & 9 12 Ψ , recta 9 8 erit æqualis ut supra, rectæ N M, vel A B, vel B Δ , basis verò 8 X fiet subtripla potestate basis O N vel C B. Et fiet X 11 9 parabola ejusdem cum parabolis C T A, vel O 3 M naturæ à qua cum formabitur curva Ψ 12 9 cujus applicatæ 8 Ψ , 10 12 sint, ut supra, æquales curvis X 9, 11 9. Probabimus; ut supra, curvam $\beta \pi \theta$, & curvam 9 11 X esse inter se æquales, & similes, hoc est easdem. Unde concluditur bases $\Theta \Delta$, & Ψ 8 esse æquales, ideóque basem Ψ 8 sive curvam 9 11 X esse potestate subtriplam rectæ $\delta \lambda$, sive B F, sive curvæ A E. Est autem etiam ex prædemonstratis parabola X 11 9 subtripla potestate parabolæ O 5 Q: Ergo curva A E & parabola O 5 Q erunt inter se æquales. Eodem ratiocinio in ulterioribus casibus utemur, & generalem nostri theorematem veritatem evincemus.

Qui autem superiorem dissertationem & hanc ad ipsam appendicem accuratiùs legerint, præcipua methodi nostræ fundamenta statim agnoscent, & ex eis deduci facillimam curvarum dimensionem deprehendent.



DE SOLUTIONE PROBLEMATUM Geometricorum per curvas simplicissimas, & unicuique problematum generi propriè convenientes.

DISSERTATIO TRIPERTITA.

— P A R S I.



T constat Cartesium in Geometricis etiam hominem esse, quod paradoxum meritò forsan quis dixerit, videant subtiliores Cartesiani an mendum contineat linearum curvarum in certas classes aut gradus Cartesiana distributio, & an probabilior & commodior secundùm veras analyseos Geometricæ leges debeat assignari. Quod sine dispendio famæ tanti & tam celebris viri executuros nos censemus, cum Cartesii & Cartesianorum omnium intersit veritatem cuius fautores se non immeritò jactant acerrimos, licèt ipsorum placitis aliquantisper adversetur, omnibus aut (si generale hoc nimis) Geometris saltem & Analystis fieri manifestam.

Problematum Geometricorum in certas classes distributio, non solùm veteribus, sed & recentioribus necessaria visa est Analystis. Proponatur videlicet $A \rightarrow D$ æquari B , aut A quadratum $\rightarrow B$ in A æquari Z plano. Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum suis terminis non excedit, posterior autem lateris ignoti secundam potestatem sive quadratum continet, primum & simplicius problematum genus constituunt. Ea verò sunt problemata quæ plana Geometris dici consueverunt. Secundum problematum genus illud est in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem, hoc est ad cubum vel ad quadratoquadratum pertingit. Ratio autem cur duæ potestates proximæ licèt diversi gradus sint, unum tamen tantùm constituent problematum genus, hæc est, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad simplices aut laterales facili, quæ & veteribus & novis cognita est, methodo, ideoque per regulam & circinum nullo negotio resolvuntur. Æquationes autem quarti gradus sive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertij gradus sive cubicas beneficio novæ, quam Vieta & Cartesius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta subtilem illam & sibi peculiarem climacticam paraplerosin destinavit, ut apud eum videre est cap. 6. libelli de emendatione æquationum, nec absimili in pari casu usus est artificio Cartesius, licèt aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam sive æquatio-

nem sexti gradus ad æquationem quinti deprimet; licet aliquanto difficilius, Vietæus aut Cartesianus Analysta. Ex eo autem quod in prædictis casibus, in quibus una tantum ignota quantitas invenitur æquationes graduuni paritum ad æquationes graduum imparium proximè minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronuntiavit Cartesius paginâ 323. Geometriæ linguâ Gallicâ ab ipso conscriptæ. Huiusmodi verò sunt æquationes omnes linearum curvarum constitutivæ, in his enim non solum prædicta reductio vel depressio non succedet, ut Cartesius affirmabat, sed eam omnino impossibilem Analystæ experientur. Proponatur v. g. æquatio paraboles quadratoquadraticæ constitutiva in qua A quadratoquadratum æquatur Z solido in E , quia ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ parapleroseos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam assignamus, hæc enim levia & prorsus arbitraria cur immutarit Cartesius non video.

Ut autem pateat disquisitionem hanc aut animadversionem non esse otiosam & inutilem, suppetit methodus universalis quâ problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem ascendat, illud per sectiones conicas quæ sunt secundi gradus expediemus; sed si æquatio ad quintam vel ad sextam potestatem ascendat, tunc solutionem per curvas tertij gradus possumus exhibere: si æquatio ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, solutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, & sic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantum, sed de re agitari quæstionem. Proponatur in exemplum A cubocubus $\rightarrow B$ planosolidum in A æquari Z solido solido. Aut, si velis, A quadratocubus $\rightarrow B$ planoplanum in A æquari Z plano solido; in utroque hoc casu problema solvemus per curvas tertij gradus seu cubicas, quod & fecit Cartesius. Sed si proponatur A quadratocubocubus $\rightarrow B$ planoplanosolidum in A æquari Z planosolido solido. Aut A quadratoquadratocubus $\rightarrow B$ solido solido in A æquari Z plano planosolido, tunc problema solvemus per curvas quarti gradus seu quadratoquadraticas quod nec fecit nec fieri posse existimavit Cartesius, cum in hoc casu ad curvas quinti vel sexti gradus necessario recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad solutionem cujusvis problematis curvas compositas nimis & graduum elatiorum assumit, omissis propriis & simplicioribus, cum jam sæpe & à Pappo, & à recentioribus determinatum sit non leve in Geometria peccatum esse quando problema ex improprio solvitur genere. Quod ne accidat, corrigendus est Cartesius & singula problemata suis hoc est propriis & naturalibus sedibus restituenda: sed & pag. 322. idem Cartesius disertè asserit curvas ex intersectione regulæ & alterius aut rectæ aut curvæ oriundas esse semper elatioris gradus aut generis, quàm est recta aut curva in figura pag. 321. ex qua derivantur. Intelligatur, si placet in locum ipsius rectæ CNK in dicta figura pag. 321. substitui parabolam cubicam cujus vertex sit punctum K & axis indefinitus $KLBA$ & cætera construantur ad mentem Cartesii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ constitutivam esse sequentem A cub. ex una parte, & B quad. in E ex altera. experiere autem statim curvam EC ex huiusmodi positione provenientem ad æquationem tantum quadratoquadraticam ascendere, ergo curva quadratoquadratica est elatioris gradus aut generis, quàm curva cubica secundum prædictam Cartesij definitionem, cum tamen contrarium pag. 323. expresse idem Cartesius definierit, curvam nempe quadratoquadraticam & curvam cubicam esse unius & ejusdem gradus aut generis. Methodum autem nostram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam & quartam potestatem

continent, ad secundum curvarum gradum: quæ quintam & sextam potestatem, ad tertium: quæ septimam & octavam, ad quartum reducimus, & eo in infinitum ordine exhibere non differemus quotiescumque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoscumque vel etiam Cartesianos in præjudicium veritatis dissimulare.

Nec moveat problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt & quæ ejusdem cum problematis primi gradus sint speciei & plana dicuntur, circulis hoc est curvis secundi gradus indigere; suum enim & proprium, huic objectioni responsum non deerit cum methodum nostram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes absolventem proferemus.

DISSERTATIONIS

PARS II.

UT datæ publicè fidei satisfiat, methodum generalem ad solvenda quæcumque problemata per curvas proprias & convenientes exhibemus. Prædictum est jam in prima dissertationis parte problemata duorum graduum inter se proximorum 3ⁱ verbi gratia & 4ⁱ. 5ⁱ. & 6ⁱ. 7ⁱ. & 8ⁱ. 9ⁱ. & 10ⁱ. &c. unicum tantum curvarum gradum respicere, problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam potestatem ascendunt, solvi per curvas 2ⁱ. gradus: ea verò quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt solvi per curvas 3ⁱ. gradus &c. in infinitum.

Modus autem operandi talis est. Data quævis æquatio in qua unica tantum reperitur ignota quantitas reducatur 1^o. ad gradum elatiorem sive parem: deinde ab adfectione sub latere omnino liberetur, quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneum datum ex una parte, & aliquod homogeneum incognitum cujus singula membra à quadrato lateris incogniti adficiantur ex una parte, ex altera homogeneum istud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut in æquatione ipsius quadrati cum homogeneo incognito elatiore quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evanescant. Cavendum etiam ut singula lateris quadratici sic effingendi homogenea à radice vel latere ignoto adficiantur, & ultimum tandem ex illis à secundâ etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio divisionis simplicis ex una parte, & extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium constitutivæ, & earum intersectio solutionem problematis exhibebit ea qua dudum usi sumus in solutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, si placet, A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z. plan. in A quad. quad. + D solid. in A cub. + M. plan. plan. in A quad. æquari N. sol. sol. problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt ad hanc formam reduci possunt. Nihil enim hoc aliud est quàm vel quintam potestatem ad sextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione sub A vel latere liberare, quæ omnia & Vieta & Cartesius abundè docuerunt.

Effingatur itaque quadratum à latere A cub. + B in A in E & æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque A cub. cub. + B in A qu. qu. in E bis + B qu. in A qu. in E qu. æquale A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z pl. in A qu. qu. + D sol. in A cub. + M pl. pl. in A qu. & deletò utrinque A cub. cub. & reliquis per A qu. divisis quod ex cautione adjectâ methodo semper liberum est, remanebit æquatio inter B in A cub. + Z planum in A qu. + D sol. in A + M pl. pl. ex una parte, & B in A qu. in E bis + B qu. in E qu. ex altera. Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam 3ⁱ. gradus.

Quia autem ut constituatur duplicata æqualitas & commodè ad solutionem problematis deveniatur, æquandum etiam est quadratum à latere A cub. + B in A in E posteriori

rioni prioris æquationis parti, hoc est $N \text{ sol. sol.}$ ergo per extractionem lateris quadrati, latus quadratum $N \text{ sol. sol.}$ quod facillè datur & dicatur, si placet $N \text{ sol.}$ æquabitur $A \text{ cub.}$ $\rightarrow B$ in A in E , quod est latus quadrati prioris æquationis primùm datæ parti æqualis. Habemus igitur hanc secundam æquationem inter $\text{sol. } N \text{ \& } A \text{ cub.}$ $\rightarrow B$ in A in E quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt intersectionem duarum curvarum jam inventarum dare valorem ipsius A , hoc est problematis propositi solutionem?

Si problema ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat statuetur primò sub forma octavæ potestatis, deinde ab adfectione sub latere omnino liberabitur hoc pacto. Estò itaque post legitimam ex jam præscripta methodo reductionem, $A \text{ qu. cub. cub.}$ $\rightarrow B$ in $A \text{ qu. qu. cub.}$ $\rightarrow D \text{ pl. in } A \text{ cub. cub.}$ $\rightarrow N \text{ sol. in } A \text{ qu. cub.}$ $\rightarrow M \text{ pl. pl. in } A \text{ qu. qu.}$ $\rightarrow G \text{ pl. sol. in } A \text{ cub.}$ $\rightarrow R \text{ sol. sol. in } A \text{ qu.}$ æquale $Z \text{ pl. sol. sol.}$

Effingetur latus quadrati cuilibet istius æquationis parti æquandi à latere $A \text{ qu. qu.}$ $\rightarrow B \frac{1}{2}$ in $A \text{ cub.}$ $\rightarrow D \text{ pl. in } A \text{ in } E$.

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneum eò artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radiceis A potestates in æquatione omnino evanescant, quod per facile est. Quadratum igitur illius lateris si æques priori æquationis propositæ parti, deletis communibus & reliquis per $A \text{ qu.}$ divisus, orietur æquatio curvæ 4^{t} . gradus constitutiva ex una parte.

Deinde post extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primùm propositæ parte latus $Z \text{ pl. sol. sol.}$ quod $P \text{ pl. pl.}$ dicere licet, æquabitur $A \text{ qu. qu.}$ $\rightarrow B \frac{1}{2}$ in $A \text{ cub.}$ $\rightarrow D \text{ pl. in } A \text{ in } E$, hæc verò æquatio dabit etiam aliam 4^{t} . gradus curvam, & harum duarum curvarum intersectio dabit valorem A , hoc est problematis propositi solutionem.

Notandum porro in problematibus quæ ad nonam aut decimam potestatem ascendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo sint quatuor ad minus homogenea quorum beneficio evanescant tres elatiores lateris ignoti gradus. In problematibus autem quæ ad undecimam aut duodecimam potestatem ascendunt latus effingendi quadrati consistare debere quinque ad minus homogeneis, ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evanescant. Perpetuâ autem & facillimâ methodo, hæc lateris quadrati effingendi forma per solam & simplicem divisionem vel applicationem ut verbis geometricis & in re purè geometricâ utamur expediri Analytæ experiendo deprehendent, & characterum \rightarrow & $-$ variatio nullum methodo præjudicium est allatura.

Cum autem problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt per extractionem lateris quadrati reducantur pura, ut notum est, per lineas primi gradus, hoc est rectas, expedientur, & vana evadet quam in priore dissertationis istius parte metueramus objectio cum extractionem radiceis quadratæ tanquam notam & obviam in quolibet problematum genere ex nostra methodo usurpandam supposuerimus.

Non latebit igitur deinceps accuratâ & simplicissima problematum Geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit, speciei oriundos, resolutio & constructio. Variare autem curvas salvo semper & retento naturali problematis genere, liberum erit Analytæ, & semper problemata 8^{t} . aut 7^{t} . gradus per curvas 4^{t} . problemata 10^{t} . aut 9^{t} . per curvas 5^{t} . problemata 12^{t} . & 11^{t} . per curvas 6^{t} . & sic uniformi in infinitum methodo expedientur. Cum contra per Cartesium problemata 8^{t} . aut 7^{t} . gradus curvis 5^{t} . aut 6^{t} . indigeant: problemata 10^{t} . aut 9^{t} . curvis 7^{t} . aut 8^{t} . problemata 12^{t} . aut 11^{t} . curvis 9^{t} . aut 10^{t} . & sic in infinitum, quod quàm longe à simplicitate & veritate geometricâ absit, videant ipsi Cartesiani, aut si ita visum fuerit, contradicant.

Veritatem enim tantùm inquirimus, & si in scriptis tanti viri alicubi delitescat, eam libenti statim animo & amplectemur & agnoscemus. Tanta me sanè, ut verbis alienis utar, hujus portentosissimi ingenii incessit admiratio, ut pluris faciam Cartesium errantem quam multos *κατορθύνας*.

DISSERTATIONIS

P A R S III.

HÆc ad generalem Doctrinam fortasse sufficiant, quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant. Majus quippe infiniti casus speciales non recusant, juvat itaque ulterius expatiari & Analyfin Cartesianam non solum ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sexcuplo, decuplo, centuplo &c. in infinitum aliquando minores deprimere ut tantò magis error Cartesianus detegatur & proprium statim ab Analyfi remedium consequatur: potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodius erit.

Proponatur invenire sex continuè proportionales inter duas datas. Sint duæ datæ B & D, prima inveniendarum ponatur A, fiet æquatio inter A^7 & $B^6 D$. Hæc æquatio secundum Cartesium per curvas 5^1 tantum aut 6^1 gradus solvi potest. Nos eam per curvas 4^1 gradus in secundâ hujus dissertationis parte sicut reliquas etiam ejusdem naturæ generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominus eam per curvas 3^1 gradus resolvamus. Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti $A^4 E^2 D$, æquabitur ex una parte A^7 & divisus omnibus per A^4 manebit D æquatio inter $E^2 D$ & A^3 quæ dat, ut patet, curvam 3^1 gradus. Ex altera verò parte $A^4 E^2 D$ æquabitur $B^6 D$, & omnibus per D divisus & reliquis subquadraticè depressis, manebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dabit etiam curvam 3^1 gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi per curvas 3^1 gradus solutionem.

Sed proponatur inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continuè, æquatio erit inter A^{13} & $B^{12} D$, eam autem Cartesius solvi tantum per curvas 11^1 . aut 12^1 . gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter ut similes quasvis ejusdem gradus eam in secunda hujus dissertationis parte per curvas 7^1 gradus solvi posse docuimus. Sed ulterius inquirenti occurrit statim elegans per curvas 5^1 gradus solutio, imò & datur per curvas 4^1 , ut infra videre est: æquentur primùm singula hujus æquationis membra homogeneo $A^8 E^4 D$, ex una parte nempe A^{13} , & ex altera $B^{12} D$, in prima omnibus per A^8 divisus, fiet æquatio inter A^5 & $E^4 D$ quæ dat curvam 5^1 . gradus ut patet. In secunda omnibus per D divisus & per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dat curvam 3^1 gradus. Per duas itaque curvas quarum una est 5^1 . gradus, altera 3^1 . problema propositum expedimus.

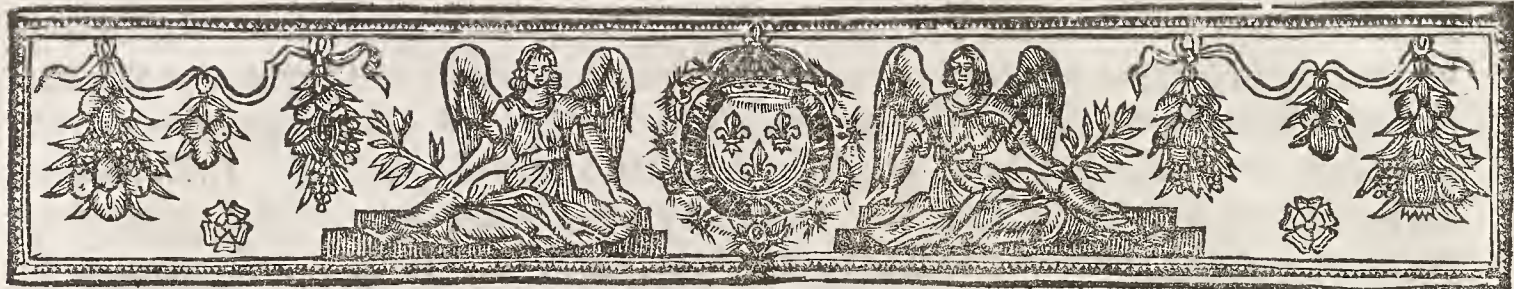
Sed idem etiam problema facilius, hoc est, per curvas 4^1 . gradus construere possumus; æquentur singula æquationis membra $A^9 E^3 D$ fiet illinc post divisionem per A^9 A^4 æquale $E^3 D$, quæ æquatio dat curvam 4^1 . gradus, istinc verò omnibus per D divisus, & deinde per tertiam potestatem sive cubum depressis fiet æquatio inter $A^3 E$ & B^4 quæ dabit etiam curvam 4^1 . gradus. Problema itaque per duas 4^1 . gradus curvas facillimè construimus.

Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin inventio trigesima mediarum continuè proportionalium per curvas 7^1 , imò & per curvas 6^1 . possit expediri. Æquatio nempe inter A^3 & $B^3 D$ communi termino $A^{24} E^6 D$ æquabitur, unde problema per curvas 7^1 . gradus expedietur, aut communi termino $A^{25} E^5 D$ æquabitur, unde manabit solutio per curvas 6^1 . gradus. Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas 9^1 . gradus, & patet ex præmissis posse assignari rationem inter gradum problematis & gradum curvarum illud solventis omni datâ ratione majorem. Quod cum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati & admonitionis & emendationis nostræ subscribant. Advertendum autem

immutandam sæpe esse ipsam æquationis formam ut commodam per partes aliquotas divisionem homogenea ipsa recipiant, quod semel monuisse sufficiet. Proponatur videlicet inventio decem mediarum & sit æquatio inter A^{11} & $B^{10} D$, ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam verb. grat. Z, ut sit æquatio inter $A^{11} Z$ & $B^{10} D Z$, ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depressio, æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis $A^8 E^4$ illinc oriatur æquatio inter $A^3 Z$ & E^4 quæ dat curvam 4^1 gradus. Istinc verò beneficio extractionis lateris quadratoquadratici inter $A^2 E$ & latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10} D Z$, quod, si placet, sit N solidum, quæ æquatio dat curvam 3^1 gradus, atque ita invenientur 10. mediæ per duas curvas quarum altera est 4^1 . altera verò 3^1 . gradus. Quod per levem illam prioris æquationis immutationem facillimè sumus executi. Nec moror infinita alia quæ Analystis ars ipsa abunde suppeditabit compendia; Hoc tantùm adjungo ea omnia quæ superius diximus non solum locum habere cum potestas ignota nullum aliud sub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, sed etiam si aliqua ex homogeneis à gradibus potestati proximioribus adficiantur ut si $A^{13} + N A^{12} + M A^{11} + R A^{10}$ æquetur $B^{12} D$, solutio hujus quæstionis perinde facilis reddetur communi adsumpto æquationis homogeneo quo supra usi sumus, nempe $A^9 E^3 D$, ac si inveniendæ 12 mediæ inter duas datas proponerentur. Simili autem in æquationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen in æquationibus in quibus una tantùm reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem potestatis illius puræ debere esse numerum primum ut ab eo gradus illius problematis designetur. Si enim exponens ille sit numerus compositus, problema ad gradus numerorum qui cum metiuntur statim devoluetur. Quærantur, exempli gratiâ, 8 mediæ continuè proportionales inter duas datas, fiet æquatio inter A^9 & $B^8 D$, quo casu cum numerus 9. sit compositus à numero 3. bis mensuratus, inferetur problema esse 3^1 . gradus, quod quidem ita se habet, si enim inter duas datas reperiantur duæ mediæ, & rursus inter primam & secundam, secundam & tertiam, tertiam & quartam reperiantur similiter duæ mediæ, fient 8 mediæ inter duas primùm propositas lineas. Si quærantur 14. mediæ inter duas datas, æquatio quæ est inter A^{15} & $B^{14} D$ indicabit problema devolui ad alia duo problemata quorum unum est 3^1 gradus, alterum 5^1 . unde apparet exponentem puræ potestatis debere esse numerum primum ut verè gradum problematis exprimat & designet.

Cum autem numeros à binario quadraticè in se ductos & unitate auctos esse semper numeros primos apud me constet & jam dudum Analystis illius theorematis veritas fuerit significata, nempe esse primos 3. 5. 17. 257. 65537. &c. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio problema construemus cujus gradus ad gradum curvarum ipsius solutioni inservientium rationem habeat datâ quavis majorem. Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continuè proportionales fiet æquatio inter A^{257} & B^{256} & singuli termini æquabuntur sequenti $A^{240} E^{16} D$, & mox quæstio per curvas 17^1 gradus expedietur, si quærantur mediæ 65536 quæstio per curvas. 257 gradus solvetur, & sic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proximè minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt? An ergo errasse Cartesium ulterius Cartesiani dissimulabunt, ego sanè ἐπιχω & quid statuendum hac de re sit sollicitus & tacitus expecto.



PORISMATUM EUCLIDÆORUM

Renovata Doctrina, & sub formâ Isagoges
recentioribus Geometris exhibita.



NUMERAVIT Pappus initio libri septimi libros veterum Geometrarum ad *τύπον ἀναλυόμενον* pertinentes : qui omnes cū temporis injuriâ perierint, exceptis unico datorum Euclidis libello & quatuor prioribus conicorum Apollonii, elaborandum Neotericis Geometris maximè fuit ut damnum operum, quæ tentavit edax abolere vetustas, aliquantisper refarcirent; & primò quidem subtilissimus ille, nec unquam satis laudatus Franciscus Vieta Apollonii *πρὸς ἐπιπέδων* libros unico, quem Apollonium Gallum inscripsit, libello feliciter restituit; cujus exemplo se ad eandem provinciam Marinus Ghetaldus, & VVillebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit proposito eventus, libros enim Apollonii *λόγος ἀποτομῆς, χωρὶς ἀποτομῆς, διορισμένης τομῆς & νεύσεων* illorum beneficio vix amplius desideramus. Sequebantur loci plani, loci solidi, & loci ad superficiem. At huic quoque parti non ignoti nominis Geometræ succurrerunt: eorumque opera manuscripta licet, & adhuc inedita latere non potuerunt. Sed supererat tandem intentata, ac velut desperata porismatum Euclidæorum doctrina. Eam quamvis opus artificiosissimum, ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum Pappus asserat, nec superioris nec recentioris ævi Geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodò sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, & quâ ratione in hac materiâ Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem se clara videndam obtulit, & purâ per noctem in luce refulsit; nec debuit inventi novantiqui specimen posteris invideri, postquam enim Suevicum sydus omnibus disciplinis illuxit, frustra scientiarum arcana tanquam mysteria quædam abscondamus, nihil quippe impervium perspicacissimo incomparabilis Reginæ ingenio, nec fas censemus occultare doctrinam quam vel unico dumtaxat aut inspirantis, aut mandantis nutu, quodocunque libuerit, detectam iri vix possumus dubitare. Ut autem clariùs se prodat totum porismatum negotium, celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus easque Geometris & considerandas & examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit Porisma & cui maximè inserviat usui innotescat.

Porisma primum.

Videatur figura porismatis 1.

Sint duæ rectæ ON, OC , quæ angulum constituent in puncto O & sint ipsæ positio-
ne datae, dentur & puncta A & B , à punctis B & A ducantur rectæ BE, AF ipsi
 OC parallelæ & occurrentes rectæ NO productæ in punctis E & F , jungatur recta AE ,
quæ rectæ CO productæ occurrat in D , jungatur itidem recta FB , quæ eidem rectæ
 CO occurrat in C & ad quodvis punctum rectæ ON ut V , verbi gratiâ, inflectantur re-
ctæ AV, BV , ita ut recta AV occurrat rectæ OC in puncto S recta autem BV eidem
 OC occurrat in puncto R , rectangulum sub CR in DS æquale semper erit rectangulo
sub CO in OD , ideoque spatium dato.

Porisma secundum.

Videatur figura porismatis 2.

Exponatur parabolæ quævis NAB , cujus diametri quælibet sint BE, O , suman-
tur in curva duo quævis puncta A & N ; à quibus inflectantur ad aliud quod-
vis curvæ punctum, ut D , Rectæ ADN , quæ in diametris puncta E, O, G, Q fig-
nent, in eadem diametro abscedentur semper duæ rectæ, quæ eandem servabunt
rationem; erit nempe ut OB ad BE , ita, QB ad GB , idque in infinitum.

Porisma tertium.

Videatur figura porismatis 3.

Esto circulus cujus diameter recta AD , Cui parallela utcumque ducatur NM ;
circulo in punctis, N & M occurrens; & sint data puncta N & M , inflectatur
utcumque recta NBM , quæ secet diametrum in punctis O & V . Aio datam esse
rationem rectanguli sub AO in DV , ad rectangulum sub AV in DO ; ideo-
que si inflectatur NCM secans diametrum in punctis R, S , erit semper ut rectan-
gulum sub AN in DV ad rectangulum sub AV in DO , ita rectangulum sub AR
in DS , ad rectangulum sub AS in DR , nec difficile est propositionem ad ellipses,
hyperbolas & oppositas sectiones extendere.

Porisma quartum.

Videatur figura porismatis 4.

EXponatur Circulus ICH cujus diameter IDH data, centrum D , radius ad diametrum normalis CD , sumantur in diametro producta puncta B & A data, & sint rectæ AI , BH æquales, fiat ut DI ad IA , ita DL ad LI , & sit recta DR æqualis DL , dabuntur puncta R & L , jungatur recta CA cui æqualis ponatur AF ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat BG æqualis & parallela, inflectatur quævis recta ad circumferentiam à punctis F & G , ut $FE G$, quæ diametrum secet in punctis M & N , Aio summam duorum quadratorum RM , LN æquari semper eidem spatio dato; iisdem positis in secundo casu jungatur recta CL cui æqualis ponatur LP ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis & parallela fiat RZ , si à duobus punctis Z & P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta ut PVZ secans diametrum in punctis K & T quadratorum AT & BK aggregatum æquabitur semper alteri spatio dato.

Porisma quintum.

Videatur figura porismatis 5.

Esto circulus RAC , cujus diameter $RD C$ data, centrum D , radius DA ad diametrum normalis, sumantur utcumque puncta Z & B data in diametro à centro D æquidistantia, & juncta AZ fiat æqualis ZM ad diametrum perpendicularis eidemque æqualis, & parallela ducatur BO , inflectatur quævis ad circumferentiam recta MHO quæ diametrum in punctis E & N secet, erit semper ratio quadratorum EH , HC , simul sumptorum ad triangulum EHN data, eadem nempe quæ rectæ AZ ad quartam partem rectæ ZD . Ex adductis porismatibus, quorum propositiones elegantissimas & pulcherrimas esse quis diffiteatur, haud difficulter indaganda se prodit ipsa porismatum natura.

Enunciari nempe posse, cundum Pappum, vel ut theoremata vel ut problemata statim patet, nos sane ut theoremata enunciavimus, sed nihil vetat quominus in problemata transformentur; exempli causâ sic quintum porisma concipi potest. Dato circulo RAC cujus diameter RC , quærantur duo puncta ut M & O , à quibus si inflectatur quævis ad circumferentiam recta ut MHO faciat semper rationem quadratorum ab abscissis EH , HC ad triangulum $EH C$ datam; nec latet ex supradicto theoremate constructio, si enim ponatur recta AZ esse ad quartam partem ZD in ratione datâ, omnia constabunt, eademque ratione in reliquis & omnibus omnino porismatibus theoremata in problemata facile transibunt.

Quod autem innuit Pappus ex sententia Juniorum Geometrarum porisma deficere hypothese à locali theoremate, id sanè totam porismatis naturam specificè revelat neque alio ferè auxilio quàm eo quod hæc verba subministrarunt hujusce abdita materiæ penetravimus.

Cum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsum inveniendæ lineæ designaverimus, sed cum ex supposito loco dato & cognito alium locum venamus, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide, qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem & esse & vocari verissimè

Pappus subjunxit. Exemplo unico definitionem nostram astruemus in figura 5^r. porismatis, datâ rectâ R C, si quærat^r curva quælibet ut R A B cujus ea sit proprietas ut à quolibet ipsius puncto ut A demissa perpendicularis A D faciat quadratum A D æquale rectangulo R D C inveniemus curvam R A C esse circuli circumferentiam, sed si ex dato jam loco illo alium investigemus, problema verbi gratiâ porismatis 5^r. novus iste locus & infiniti alii quos periti sagacitas Analystæ repræsentabit & ex jam cognito eliciet, porisma dicetur.

Cum autem ut jam diximus Porismata ipsa sint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi Porismatum opus perutile ait ad resolutionem obscuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam; quæ ultima verba cum nullum ferè sensum admittant ad ipsum authorem recurrendum cujus verba in manuscriptis Codicibus ita se habent, *Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἀθροίσμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμμετρεσέων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπείρητον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.*

Ait igitur porismata conferre ad Analysin obscuriorum problematum & generum hoc est problematum generalium, ex dictis enim apparet porismatum propositiones esse generalissimas, deinde subjungit, cum natura multitudinem quæ vix potest animo comprehendi subministret, quibus verbis infinitas illas & miraculo proximas ejusdem problematis indicat solutiones. Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deest peculiaris à puriore Analysis derivanda methodus, cujus ope non solum quinque præcedentia Porismata sed pleraque alia & invenimus & construximus & demonstravimus, & si hæc paucula, quæ isagogica tantum & accuratioris operis prodroma emittimus, doctis arrideant, tres totos porismatum libros aliquandò restituemus, imò & Euclidem ipsum promovēbimus & Porismata in conicis sectionibus & aliis quibuscumque curvis mirabilia sanè, & hæctenus ignota detegemus.





LETTRES DE MONSIEUR DE FERMAT,

Avec quelques-unes de celles qui luy ont esté écrites par plusieurs personnes de grand sçavoir sur divers sujets de Mathematiques ou de Physique.

LETTRE DE M. DE FERMAT AU R. Pere Mersenne Minime.

Du 3. Juin 1636.



MON R. PERE,

J'ay receu vôtre lettre avec satisfaction, puis qu'elle contient des remarques & des experiences tres singulieres. J'en fairay l'estime que je dois, & de tout ce qui me viendra de vôtre part. Je n'ay point veu de livre de Musique plus nouveau de vous que celuy que vous appelez questions harmoniques, que j'ay relié avec un autre recueil de questions, & les mechaniques de Galilæi, si la demonstration de la proposition de l'helice n'estoit pas de grand discours & de grande recherche, je vous l'envoyerois presentement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands traitez d'Archimede, de sorte que je vous demande un peu de loisir pour cela, & cependant vous la pouvez tenir pour tres-veritable. J'en dresseray un traité exprez, ou je vous fairay voir de nouvelles helices aussi admirables qu'on en puisse imaginer. Pour vous en donner l'avant-goût, en voicy une, qui est peut-estre cette ligne que Menelaüs appelle admirable dans le Pappus.

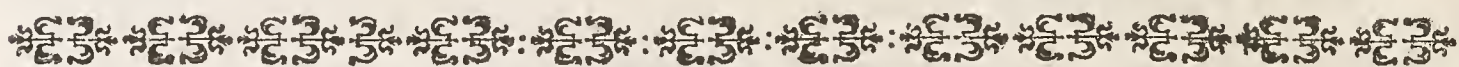
Esto helix $A M B$ in circulo $C N B$, cujus ea sit proprietas, ut ductâ qualibet rectâ, verbi gratiâ, $A M N$, tota circuli circumferentia sit ad ejusdem circumferentiæ portionem $N C B$ ut $A B$ quad. ad quad. $A M$ (in hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod in helice Archim. sit ut circumferentia ad portionem $N C B$, ita

Q

A B ad A M) pronunciamus primò spatium sub helice & rectâ A B comprehensum esse dimidium totius circuli.

Deinde (quæ est proprietas mirabilis) spatium ex prima revolutione ortum (quod hîc sit N) esse dimidium spatii M , ex secunda revolutione orti , spatium verò C ex 3. revolutione ortum esse æquale spatio M , & omnia omnino deinceps spatia ex qualibet revolutione orta dicto spatio M similiter esse æqualia , ideoque & inter se.

Je croy que vous m'avoüerez que ces recherches sont belles , mais j'ay si peu de commodité d'en écrire les demonstrations qui sont des plus mal-ayfées , & des plus embarrassées de la Geometrie , que je me contente d'avoir découvert la verité , & de sçavoir le moyen de la prouver lorsque j'auray le loisir de le faire . Si je puis trouver quelque occasion d'aller passer trois ou quatre mois à Paris , je les employeray à mettre par écrit toutes mes nouvelles pensées en ces Arts , à quoy je pourray sans doute estre beaucoup aydé de vos soins. J'ay veu la Geostatique de Mr. de Beaugrand , & me suis étonné d'abord d'avoir trouvé ma pensée differente de la sienne , j'estime que vous l'aurez déjà remarqué. Je luy envoie franchement mon avis sur son livre , vous assurant que j'estime si fort son esprit , & qu'il m'en a donné de si grandes preuves , que j'ay peine à me persuader , qu'ayant entrepris une opinion contraire à la sienne , je ne me sois éloigné de la verité. Je consens pourtant qu'il soit mon juge , & ne vous refuse pas non plus. Et parceque j'ay écrit à la hâte la demonstration que je vous envoie , & l'écrit que je luy envoie , je mettray tout au net à loisir , & tacheray même de trouver de nouvelles raisons pour soutenir mon opinion , à laquelle pourtant , je ne m'attacheraï jamais par opiniâtreté dès qu'il me fera connoître le contraire. Je suis , &c.



Au R. P. Mersenne Minime.

Du 24. Juin 1636.

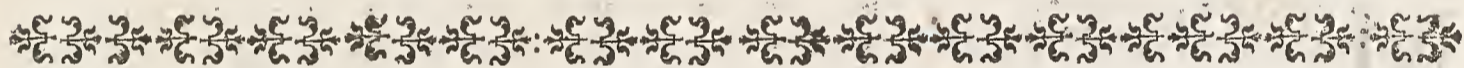
MON R. PERE,

Je suis marry de n'avoir peu vous faire précisément comprendre mes sentimens touchant ma proposition Geostatique, Il est pourtant vray que je n'avois garde de la prendre au sens que vous avez crû , car la seule raison que j'ay employée contre l'opinion de M. de Beaugrand , ça esté celle-la même que j'ay trouvée dans vôtre lettre , de sorte que je n'avois garde de tomber dans un inconvenient que j'avois preveu & condamné. J'estime donc que tout grave , en quel lieu du monde qu'il soit , horsmis dans le centre , pris en foy & absolument , pese toujors également ; & c'est une proposition que j'aurois aisément prise pour principe si je ne la voyois contestée ; je tâcheray donc à la prouver. Mais qu'elle soit vraye ou non , cela n'empêche pas la verité de ma proposition qui ne considere jamais le grave en foy , mais toujours par relation au levier , & ainsi je ne mets rien dans la conclusion qui ne se trouve dans les premisses. Or l'equivoque , sans doute , est venue de ce que je ne vous ay pas assez expliqué les nouvelles pensées que j'ay sur le sujet des Mechaniques , & lesquelles vous verrez grossierement crayonnées sur le papier que je vous envoie. C'est pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à personne , & que vous me donnerez le loisir pour en faire les demonstrations exactes , ou plutôt pour les mettre au net , car elles sont déjà faites. L'erreur d'Archimede , si pourtant nous le pouvons nommer ainsi , provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arrêteront , quoy qu'ils ne fussent pas paralleles à l'horizon , dequoy j'ay démontré le contraire. Si vous examinez de nouveau la 6. & la 7. des equiponderans , vous trouverez que je ne me trompe pas , & que sa demonstration est toute fondée sur cette supposition.

Car soit le levier EDB duquel le centre A , celui de la terre C . Archimede pour demontrer la proposition reciproque des poids, les divise en parties égales comme E ; & les attache en distances égales le long du levier. Or il suppose que le centre de gravité de deux poids est au point qui divise leur intervalle également, & cela est bien vray aux deux poids qui sont autour du point A , parceque la ligne AC , estant perpendiculaire au levier, les poids E autour du point A ; se trouvent également éloignés; & du centre du levier & de celui de la terre, & par conséquent ils se trouvent d'égale inclination, mais si dans le même levier vous prenez le point D qui divise l'intervalle des deux graves E également, en ce cas le point plus éloigné du centre du levier est aussi le plus éloigné du centre de la terre, & ainsi le point D avec les deux poids E represente une balance, de laquelle les bras ne sont pas paralleles à l'horison; mais si la descente des graves se faisoit par lignes paralleles comme en cette figure par les lignes AC , & DN , en ce cas la proposition d'Archimede seroit vraye. Ce n'est pas que dans l'usage elle manque sensiblement; mais il y a plaisir de chercher les veritez les plus menuës & les plus subtiles, & d'ôter toutes les ambiguités qui pourroient survenir: C'est ce que j'ay fait tres exactement, & je vous puis assurer que quoy que la recherche en soit bien malaisée, j'en possède toutes les demonstrations parfaitement:

Soit le centre de la terre A , le grave E au point E , & le point N dans la superficie ou ailleurs plus éloigné du centre que le point E . Je ne dis pas, que le poids E pese moins estant en E , que s'il estoit en N , mais je dis que si le poids E est suspendu du point N par le filet NE , que la force étant au point N le retiendra plus aisément que s'il estoit plus proche de ladite force, & ce en la proportion que je vous ay assignée.

Je croy vous avoir suffisamment expliqué ma pensée sur ce sujet. Pour la question des nombres dont vous me parlez, si vous m'en faites part, je tâcheray de la résoudre: j'envoyai il y a déjà long-temps la proposition des parties aliquotes à M. de Beaugrand avec la construction pour trouver infinis nombres de même nature. S'il ne l'a pas perdue, il vous en fera part. Je vous prie de relire ma proposition des graves, & de m'en dire vôtre avis: Je suis, &c.



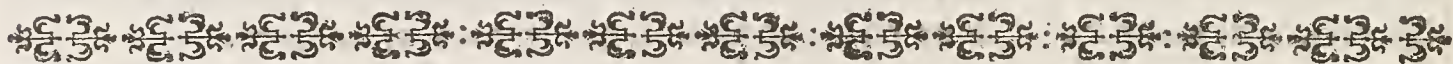
Au R. P. Mersenne Minime.

Du 2. Septembre 1636.

MON R. PERE,

La lettre dont vous me parlez dans vôtre dernière s'est sans doute égarée, car celle que je viens de recevoir est la seule qui m'est venue depuis cinq ou six semaines de vôtre part; sur le sujet de laquelle je vous diray, que quand nous parlons d'un nombre composé de trois quarrés seulement; nous entendons un nombre, qui n'est ny quarré ny composé de deux quarrés: & c'est ainsi que Diophante & tous ses interpretes l'entendent, lors qu'ils disent qu'un nombre composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne peut jamais estre divisé en deux quarrés, non pas même en fractions. Autrement, & au sens que vous semblez donner à vôtre proposition, il n'y auroit que le seul nombre de trois qui fut composé de trois quarrés seulement en nombres entiers; car premièrement tout nombre est composé d'autant de quarrés entiers, qu'il a d'unités. Secondement vos nombres de 11. & 14. se trouvent composés chacun de 5. quarrés. Le premier de 4. 4. 1. 1. 1. Le second de 4. 4. 4. 1. 1. que si vous entendez que le nombre que vous demandez soit composé de 3. quarrés seulement, & non pas de quatre;

en ce cas la question tient plus du hazard, que d'une conduite assurée, & si vous m'en envoyez la construction, peut-estre vous le fairay. - je avouër. De sorte que j'avois satisfait à vôtre proposition, au sens de Diophante, qui semble estre le seul admissible en cette sorte de questions. Or qu'un nombre composé de 3. quarez seulement en nombres entiers, ne puisse jamais estre divisé en 2. quarez, non pas même en fractions, personne ne l'a jamais encore démontré, & c'est à quoy je travaille, & crois que j'en viendray à bout, cette connoissance est de grandissime usage, & il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout, M. de Beaugrand est en cela de mon avis. Si je puis étendre en ce point les bornes de l'Arithmetique, vous ne sçauriez croire les propositions merueilleuses que nous en tirerons. Pour la proposition Geostatique, elle est toute fondée sur ce principe seul, que deux graves égaux joints par une ligne ferme & laissez en liberté se joindront au centre de la terre par le point qui divise également la ligne qui les unit, c'est à dire que ce point de division s'unira au centre de la terre. Messieurs de Pascal & de Roberval, après avoir reconnu que tout mon raisonnement est fondé la dessus, & qu'accordant ce principe, ma proposition est sans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome le plus clair & le plus évident qu'on peut demander, obligez-moy de me dire si vous estes de leur sentiment. Je l'ay pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes tirez des experiences qu'on ne me sçauroit contester, & je le leur enverray au plûtôt. Je suis, &c.



*Lettre de Messieurs de Pascal & de Roberval à M.
de Fermat.*

A Paris le 16. Aoust 1636.

MONSIEUR,

Le principe que vous demandés pour la Geostatique est, que si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme & de foy sans poids, & qu'étans ainsi disposez ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusqu'à ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unifise au centre commun des choses pesantes. Ce principe, lequel nous avons considéré il y à long-temps, ainsi qu'il vous a esté mandé, paroît d'abord fort plausible: mais quand il est question de principe, vous sçavez quelles conditions luy sont requises pour estre receu: desquelles conditions, au principe dont il s'agit; la principale manque; sçavoir, que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesants descendent, & quelle est l'origine de leur pesanteur. Ce qui n'étant point en nôtre connoissance (comme il faut librement avouër, & en cecy; & quasi en toutes les autres choses physiques) il est évident qu'il nous est impossible de déterminer, ce qui arriveroit au centre ou les choses pesantes aspirent, ny aux autres lieux hors la surface de la terre, sur laquelle, parceque nous y habitons, nous avons quelques experiences assez constantes, desquelles nous tirons ces principes en vertu desquels nous raisonnons en la Mechanique.

La diversité des opinions touchant l'origine de la pesanteur des corps, aucune desquelles n'a esté jusques icy ny démontrée ny convaincuë de fausseté par demonstration, est un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

La commune opinion est, que la pesanteur est une qualité qui reside dans le corps même qui tombe.

D'autres sont d'avis que la descente des corps procede de l'attraction d'un autre corps qui attire celui qui descend, comme de la terre. Il y a une troisième opinion qui n'est pas hors de vray-semblance; que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un desir naturel que ces corps ont de s'unir ensemble; comme il est évident au fer & à l'aimant, lesquels sont tels, que si l'aimant est arrêté, le fer ne l'étant pas; l'ira trouver; & si le fer est arrêté, l'aimant ira vers luy; & si tous deux sont libres, ils s'approcheront reciproquement l'un de l'autre; en sorte toutefois, que le plus fort des deux fera le moins de chemin.

Or de ces trois causes possibles de la pesanteur ou des centres des corps, les consequences sont fort differentes, particulièrement de la premiere & des deux autres, comme nous faisons voir en les examinant.

Car si la premiere est vraye, le sens commun nous dicte, qu'en quelque lieu que soit un corps pesant, près ou loin du centre de la terre; il pesera toujours également, ayant toujours en soy la même qualité qui le fait peser, & en même degré. Le sens commun nous dicte aussi (posée cette même opinion premiere) qu'alors un corps reposera au centre commun des choses pesantes, quand les parties du corps qui seront de part & d'autre du même centre, seront d'égale pesanteur, pour contrepeser l'une à l'autre, sans considerer si elles sont peu ou beaucoup, également ou inégalement éloignées du centre commun.

Si cette premiere opinion est véritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la Geostatique puisse subsister.

Car soient deux poids égaux $A B$ joints ensemble par la ligne droite ferme & de soy sans poids $A B$ & soit C le point du milieu de la même ligne $A B$, & soient D, E , deux autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A & B . Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B tombans librement avec leur ligne ne reposent point jusqu'à ce que le point du milieu C s'unisse au centre commun des choses pesantes. Suivant cette premiere opinion nous accordons, que si le point C est uny au centre des choses pesantes, le composé des poids $A B$ demeurera immobile véritablement. Mais il nous semble aussi que si le point D ou E convient avec le même centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contrepeseront encore & demeureront en equilibrium: puisque (pour nous servir de vos propres termes) ces deux poids sont égaux, & ont tous deux même inclination de s'unir au même centre commun des choses pesantes, & l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu. Et ne sert de rien d'alleguer le centre de pesanteur du corps $A B$, lequel centre selon les anciens est au milieu C ; car il n'a pas esté démontré que le point C soit le centre de pesanteur du composé $A B$ sinon lors que la descente des corps se fait naturellement par des lignes paralleles, ce qui est contre vos suppositions & les nôtres & contre la verité, & même nous ne voyons pas qu'aucun corps, hormis la Sphere, ait un centre de pesanteur, posée la definition de ce centre selon Pappus & les autres Auteurs: & quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroît pas (& n'a jamais esté démontré) que ce seroit ce point la par lequel le corps s'uniroit au centre des choses pesantes: même cela, pour les raisons precedentes repugne à notre commune connoissance en plusieurs figures, comme en la seconde des deux figures suivantes. En tout cas nous ne voyons point que ce centre de pesanteur des anciens doive estre considéré autre part qu'aux poids qui sont pendus ou soutenus hors du lieu auquel ils aspirent.

Quand à la comparaison qui vous a esté faite d'un levier horizontal, lequel estant pressé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puissances égales, demeure en l'estat qu'il est: elle vous semble entièrement pareille au levier precedent $A B$

(puis que vous le voulez appeller ainsi,) d'autant que ces poids ne pressent le levier que par la force ou puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun. Comme si le levier horizontal est AB , & les forces ou puissances égales A & B pressans horizontalement le levier pour se porter à un certain point commun C , auquel elles aspirent, & lequel est posé également ou inégalement entre les mêmes puissances dans la ligne AB . Ces forces pressans également le levier, se résisteront l'une à l'autre selon nôtre sens; encore meme que l'une comme A , fut plus proche que l'autre du point commun auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit pas horizontal, mais en telle autre position que l'on voudra, estant considéré de soy sans poids, & toutes les autres choses comme auparavant, le même effet s'ensuivra selon nôtre jugement.

Nous ajouterons icy ce que nous pensons suivant cette premiere opinion; de deux poids qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme & de soy sans poids.

Soient donc deux poids inégaux A & B , desquels A soit le moindre, & soit AB la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps AB , selon les anciens; ce point C ne sera pas au milieu de la ligne AB . Si donc on met le composé des poids AB , de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire que ce composé demeurera en cet estat, le poids A estant entierement d'une part du centre des choses pesantes, & le poids B entierement de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du même centre des choses pesantes jusqu'à ce qu'une partie dudit poids B soit au delà dudit centre vers A comme la partie D , en sorte que cette partie D avec tout le poids A estant d'une même part, soit de même pesanteur que la partie E restante de l'autre part.

Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est veritable, voyez les consequences qu'on en peut tirer selon nôtre jugement:

Soit le corps attirant $ABCD$ spherique duquel le centre soit H ; & que la vertu d'attraction soit également épandue par toutes les parties du même corps, en sorte que chacune selon sa puissance, tire à soy le corps attiré, ainsi que supposent les Auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances & autres conditions estant pareilles, les parties égales du corps attirant, attireront également, & les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L , considéré premierement hors le corps attirant en A . soit même la ligne droite AH , à laquelle soit un plan perpendiculaire EHD , coupant le corps $ABCD$ en deux parties égales, & partant d'égale vertu. Soient aussi dans la ligne AH , pris tant de points que l'on voudra, comme KI , par lesquels sont menez des plans FIC , GKB paralleles au plan EHD coupans le corps attirant $ABCD$ en parties inégales, & partant d'inégale vertu. Alors le corps L estant en A , sera attiré vers H par la vertu entiere de tout le corps $ABCD$; & le chemin estant libre, il viendra en K ou étant il sera attiré vers H par la plus grande & forte partie $BDEG$, & contré tiré vers A par la plus petite & plus foible partie BAG . Il en sera de même quand il sera parvenu en I , ou il sera moins attiré que quand il estoit en K ou en A , toutefois il sera toujours contraint de s'approcher du centre H , tant qu'il y soit venu: mais la partie qui attire diminuant toujours, & celle qui contré tire s'augmentant toujours il sera continuellement attiré avec moins de vertu, jusqu'à ce qu'estant arrivé en H , il sera également attiré de toutes parts, & demeurera en cet estat.

Si cette position est vraie, il est facile de voir que le corps L pesera d'autant moins qu'il sera plus proche du centre H ; mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes HA , HK , HI , ce que vous connoîtrez en le considerant sans autre explication.

Si la troisième opinion de la descente des corps est veritable les conclusions que l'on

en peut tirer font les mêmes, ou fort approchantes de celles que nous avons tirées de la seconde opinion.

Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur, nous ne sçavons quelle est la vraie, & que même nous ne sommes pas assurés que ce soit l'une d'elles, se pouvant faire que la vraie cause soit composée des deux autres, ou que c'en soit une toute autre, de laquelle on tireroit des conséquences toutes différentes, il nous semble que nous ne pouvons poser d'autres principes pour raisonner en cette matière, que ceux desquels l'expérience assistée d'un bon jugement nous a rendus certains.

Pour ces considérations dans nos conférences de Méchanique nous appellons des poids égaux ou inégaux; ceux qui ont égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun des choses pesantes, & nous entendons un même corps avoir un même poids quand il a toujours cette même puissance: que si cette puissance augmente ou diminue; alors, quoy que ce soit le même corps, nous ne le considérons plus comme le même poids. Or que cela arrive ou non aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre commun des choses pesantes, c'est chose que nous desirerions bien de sçavoir: mais ne trouvant rien qui nous satisfasse sur ce sujet, nous laissons cette question indécise, raisonnans seulement sur ce que les anciens & nous avons peu découvrir de vray jusqu'à maintenant.

Voilà ce que nous avons à vous dire pour le present touchant votre principe de la Geostatique; laissant à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de discours.

Quant à la nouvelle proportion des Angles que vous mettez en avant; afin de la démontrer, vous supposez deux principes; desquels le premier est vray: mais le second est si éloigné d'estre vray, qu'il y a des cas ou il arrive tout le contraire de ce que vous demandez qu'on vous accorde pour vray.

Le premier est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, l'appuy du levier N; & du centre A intervalle AN, soit décrite une portion de circonférence telle quelle CNB; pourveu que l'arc CN soit égal à l'arc NB; & soit considérée la circonférence CNB; comme une balance ou un levier de soy sans poids, qui se remue librement à l'entour de l'appuy N, soient aussi des poids égaux posez en C & B. Vous supposez que ces poids feroient équilibre estans balancez sur le point N. Et il semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre quand les bras du levier NC & NB seroient des lignes droites pourveu que les extremités C & B soient également éloignées du centre A, & les lignes NC & NB, soutendantes ou cordes en effet ou en puissance d'arcs égaux NC, NB.

Toutes ces choses sont vraies en general; mais nous ne les croyons telles que pour les avoir démontrées par des principes qui nous sont plus clairs & plus connus.

Toutefois en particulier il y a une distinction à faire, laquelle est de grande considération. Sçavoir que quand les arcs NC & NB sont chacun moindre qu'un quart de circonférence, le levier CNB, chargé des poids C & B pese sur l'appuy N, poussant vers le centre A pour s'en approcher. Mais quand les arcs CN, NB sont chacun un quart de circonférence, le levier CNB chargé des poids C, B ne pese nullement sur l'appuy N, d'autant que les poids sont diametralement opposez; & partant le levier demeurera de même sans appuy qu'avec un appuy. Finalement quand les arcs égaux NC, NB sont chacun plus grand qu'un quart de circonférence, le levier CNB chargé des poids égaux C, B pese sur l'appuy N poussant vers P, pour s'éloigner du centre A.

Cette distinction estant vraie comme elle est, vostre second principe ne peut subsister, ce qui paroîtra assez par l'examen d'iceluy.

Votre second principe est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, la balance ou le levier EFB CD, dont l'appuy est D. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B pesant de toute sa puissance sur l'appuy B. Ou bien soit divisé le poids B en parties égales EFB CD, lesquelles soient posées sur le levier aux points E, F, B, C, D;

étans les arcs EF , FB , BC , CD égaux, & tout l'arc $EFBCD$ décrit alentour du centre A ; vous supposez que le poids B mis tout entier au point B pesera de même sur l'appuy B , qu'estant posé par parties égales aux points $EFBCD$. Cela est tellement éloigné du vray, que quelquefois le poids B , ainsi posé par parties sur le levier ne pesera plus du tout sur l'appuy B ; quelquefois au lieu de peser sur l'appuy B pour tirer le levier vers A , il pesera tout au contraire sur le même appuy B pour éloigner le levier de A . Et toutefois estant ramassé tout entier au point B , il pesera toujours de toute sa force sur l'appuy B , pour emporter le levier vers A . Et généralement estant divisé & étendu il pesera toujours moins sur l'appuy, qu'estant ramassé au point B , & vous supposez qu'entier & divisé il pese toujours de même.

Toutes ces choses sont démontrées en suite de nos principes & nous vous en expliquerons les principaux cas que vous connoîtrez véritables sans aucune démonstration.

Soit derechef A le centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit décrit le levier CBD qui soit de soy sans poids, prolongé tant que de besoin: & soit B le point de l'appuy, auquel si un poids est posé, nous demeurons d'accord avec vous qu'il pesera de toute sa puissance sur l'appuy B , lequel appuy s'il n'est assez fort rompra, & le poids s'en ira avec son levier jusques au centre A . Maintenant soit divisé le poids premièrement en deux parties égales: & ayant pris les arcs BC & CD chacun d'un quart de circonférence, afin que tout l'arc CBD soit une demie circonférence soit posée une moitié du poids en D , l'autre en C ; lors ces deux poids C & D pesans vers A ne feront point d'autre effet sur le levier CBD , sinon qu'ils le presseront également par les deux extrémités C & D pour le courber. Supposant donc qu'il est assez roide pour ne pas plier; ils demeureront sur le levier de même que s'ils étoient attachez aux bouts du diametre DAC sans qu'il soit besoin de l'appuy B sur lequel le levier chargé de ses deux poids ne fait aucun effort: & quand cet appuy sera osté, le tout demeurera de même qu'avec l'appuy, ce qui est assez clair.

Que si le poids est divisé en plus de deux parties égales, & qu'estant étendu sur des portions égales du levier, deux d'icelles parties se rencontrent aux points C , D , & les autres dans l'espace CBD ; alors celles qui seront en C & D ne chargeront point l'appuy B : quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points CD , auxquels finit la charge: ainsi il s'en faudra beaucoup que toutes ensemble étendues chargent autant l'appuy que lors qu'elles sont ramassées en B : elles ne pesent donc pas de même.

Davantage soient pris les arcs égaux BC & BD chacun plus grand qu'un quart de circonférence, & soit imaginée la ligne droite CD ; puis estant divisé le poids en deux parties égales seulement, soient attachées l'une en C , & l'autre en D : alors il est clair que le levier chargé des poids C , D , pesera sur l'appuy B ; mais ce sera tout au contraire, que si les deux poids estoient ramassés en B : car si l'appuy n'est pas assez fort il rompra, & les poids emportans le levier, que nous supposons estre de soy sans poids, ne cesseront de mouvoir tant que la ligne droite CD soit venue au point A , le levier estant monté en partie au dessus de B vers P ; au lieu de s'abaisser vers A comme il arriveroit si les poids estans ramassés en B , avoient rompu l'appuy. Voyez quelle difference.

Enfin soit le levier comme auparavant, auquel soient des quarts de circonférence BC , BD , & de part & d'autre du point C soient pris des arcs égaux CG , CE chacun moindre qu'un quart. De même de part & d'autre du point D soient pris les arcs égaux entre eux & aux précédents DH , DF , tous commensurables au quart. Soit aussi divisé tout l'arc EBF en tant de parties égales que l'on voudra, en sorte que les points E , C , G , B , H , D , F , soient du nombre de ceux qui font la division, & soit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc EBF , lesquelles parties de poids soient posées sur les parties de la division du levier: alors les poids qui se trouveront posés sur les arcs EC & FD déchargeront autant l'appuy B qu'il estoit chargé par ceux des arcs CG , DH :

D H : partant tous ceux qui seront sur les arcs E G & F H ne chargeront point l'appuy B, lequel, par ce moyen ne sera chargé que par ceux qui seront sur l'arc G B H; & si entre B G & B H il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs B G & B H ne feront chacun qu'une partie de la susdite division du levier) alors l'appuy B sera entièrement déchargé. Voyés donc combien il y a de différence entre les poids ramassés en B, & étendus par parties sur le levier E B F, voyez aussi qu'un même poids divisé par parties, & étendu sur le levier, pese d'autant moins sur l'appuy B que plus grande est la portion qu'il occupe de la circonférence décrite alentour du point A centre commun des choses pesantes.

Cette dernière considération pourroit bien estre cause qu'un même corps peseroit moins; plus proche que plus éloigné du centre commun des choses pesantes: mais la proportion de ces pesanteurs ne seroit nullement pareille à celle des distances; & seroit peut-estre très difficile à examiner.

Maintenant pour venir à votre démonstration. Soit le levier G I R, duquel l'appuy soit I, & que les extremités G, R & l'appuy I soient également éloignés de A centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit imaginée la portion de circonférence G I R, & soit fait que comme l'arc G I est à l'arc I R, ainsi le poids R soit au poids G. Vous dites que le levier chargé des poids G R demeurera en équilibre sur son appuy I. Quant à la démonstration, vous supposez qu'elle est facile en conséquence de vos deux principes précédens. Et de fait si ces principes estoient vrais, il ne resteroit aucune difficulté, & la chose se pourroit conclurre ainsi. Soit faite la préparation suivant la méthode d'Archimède, en sorte que les arcs R Q, R M soient égaux, tant entre-eux qu'à l'arc I G; & les arcs G B, G M égaux, tant entre-eux qu'à l'arc I R. Et soit étendu le poids R également depuis Q jusques en M, & le poids G aussi également depuis M jusques en B; ainsi les deux poids G R seront également étendus, sur tout l'arc B G I M R Q, lequel arc sera quelquefois moindre que la circonférence entière, quelquefois égal à icelle, & quelquefois plus grand. Et d'autant que les portions I B, I Q sont égales, le levier B G I R Q demeurera en équilibre, par le premier principe sur l'appuy I. Mais le poids G étendu depuis B jusques en M pese de même qu'estant ramassé au point G, par le second principe: & par le même principe, le poids R posé de même étant étendu depuis M jusques en Q, qu'estant ramassé au point R. Partant puis que ces deux poids estans ramassés en G & en R pesent de même sur le levier, qu'estans étendus, & qu'estans étendus ils font équilibre sur le levier; ils feront encore équilibre estans ramassés en G & en R.

En ce tte démonstration tout ce qui est fondé sur le second principe, reçoit les mêmes difficultés que le principe même: & partant la conclusion ne s'ensuit point que les poids G R, fassent équilibre sur le levier G I R.

Nous pouvons nous contenter de ce que dessus, croyans que vous serez satisfait: mais nous vous prions de considérer encore deux instances dont la première est telle.

Au levier G I R soit l'angle G I R droit, & partant l'arc G I R, une demie circonférence décrite autour de A centre commun des choses pesantes. Si l'on pose l'arc G I, moindre que l'arc I R, par exemple que G I soit le tiers de I R & le poids R de 20. livres; il faudroit donc en G 60. livres selon vous, pour faire équilibre sur le levier G I R appuyé au point I, & toutefois si vous mettez des poids égaux en G & en R, ils seront diamétralement opposés, & partant par le principe de la Geostatique au cas dudit principe, accordé par vous & par nous, lesdits poids égaux feront encore équilibre comme s'ils pesoient sur les extremités du diamètre G R vers le centre A: & quand il y a une fois équilibre, pour peu que l'on augmente ou diminue l'un des poids l'équilibre se perd. Voyez comme cela se peut accorder avec votre position.

La seconde instance est telle. Soit A le centre commun des choses pesantes à l'entour duquel soit la circonférence G I R, l'appuy du levier I, & les bras I G, I R desquels G I

soit le moindre ; & soit prolongée la ligne droite I A tant qu'elle rencontre la circonférence en B. Partant selon vous , il faudra en G un plus grand poids qu'en R. Et si on prend l'arc I C plus grand que I R, mettant en C le même poids qui estoit en R , il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant pour faire l'équilibre. De même prenant l'arc I D, encore plus grand que I C, & faisant I D estre le bras du levier, & mettant en D le même poids qui estoit en C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi plus le bras du levier qui est en la circonférence I R B, aboutira près du point B, estant chargé du même poids, plus il faudra en G un grand poids pour contrepeser. Et selon le sens commun par le raisonnement ordinaire, le bras du levier estant la ligne droite I B chargé comme dessus, il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois alors le poids qui sert en B, pesant vers A faisoit tout son effort sur la roideur du bras B I, & le moindre poids qui seroit en G faisoit balancer le bras I B vers D : & pour peu que le poids qui sera en G fasse balancer le bras I B avec son poids, vers D (ce qui est facile à démontrer) alors encore que tant G que B sortent hors la circonférence, on conclurra quelque chose de choquant de vôtre position.

Enfin, Monsieur, parceque l'expérience de ce que dessus, ne se peut faire par les hommes, des poids à l'égard de leur centre naturel ; si vous voulez prendre la peine de la faire alentour d'un centre artificiel, supposant pour levier un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, & des puissances qui agissent ou aspirent vers le centre du petit cercle au lieu des poids qui tendent vers le centre du grand, vous trouverez que l'expérience est du tout conforme à ce raisonnement.

Si vous avez agreable de continuer nos communications sur ce sujet ou sur celuy de la Geometrie en laquelle nous sçavons que vous excellez entre tous ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement : & ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, car nous en enverrons les demonstrations en même temps pour en avoir vôtre jugement. Vous nous obligerez aussi de nous faire part de vos pensées. Nous sommes, &c.



Lettre de M. de Fermat à Messieurs de Pascal & de Roberval.

Du 23. Aoust 1636.

MESSIEURS,

J'ay leu avec grand soin le jugement qu'il vous a plû me donner des propositions que j'avois envoyées à M. de Carcavi, & comme j'ay reconnu la fermeté de vôtre raisonnement jointe avec une grande & profonde connoissance de cette matiere, j'ay aussi crû que vous ne trouveriez pas mauvaise ma replique que je fairay en peu de mots, & que peut-estre je tireray à ce coup de vous le consentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord, & je ne pense pas avoir besoin de m'excuser des erreurs qu'il vous a semblé que j'avois commises, à quoy quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus d'écrire à M. de Roberval, lequel j'avois prié de suppleer ce qui ne seroit pas expliqué assez au long, j'aurois peut-estre suffisamment satisfait ; mais pourtant je vous declare que je n'ay jamais crû parler que du levier moindre que le demi-cercle, & si j'ay omis de l'écrire, ma figure qui n'en representoit que celui-là reparoit assez ce manquement, puisque je n'avois pas seulement eu le temps d'écrire la demonstration de ma proposition sur madite figure, que si le levier est plus grand que le demy cercle j'ajoutéray à la fin de ce discours la proportion qu'il doit garder. Il me semble que j'en ay assez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous avez faites contre mon second levier.

l'autre qui combat mon second principe a esté preveüe par moy, & je vous avoüeray que quoy que ce second principe soit manifestement faux, & qu'il choque mon sentiment sur le fait du premier levier, je l'avois pourtant industrieusement, & à dessein mis dans ma lettre, afin de vous faire accorder qu'un grave pese moins, plus il approche du centre de la terre, ou en me niant cette verité vous obliger d'accorder celle de mon second levier. Monsieur de Carcavi à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos lettres vous le temoignera sans doute, & j'en ay tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave pese moins plus il approche du centre, quoy qu'il soit mal-aisé de déterminer la proportion de la difference de ces poids; je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance, & viens à la demonstration de mon second levier, après vous avoir assuré que jamais homme du monde ne se portera avec plus de bonne foy & d'ingenuité que moy à avoüer les veritez que j'auray reconnues, & que je croy ma proposition tellement vraye, que l'ayant souvent considérée de divers biais & à diverses reprises, je n'ay jamais peu en douter.

Voicy les vrais principes de ma demonstration.

Axioma 1. Si grave quiescens ab aliquo puncto suspendatur, gravitabit super lineam rectam punctum suspensionis & centrum terræ conjungentem.

Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quiesceret. Axioma 2. in vecte circulari cujus dimidium punctum suspensionis si ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compositum & à medio illo puncto suspensum quiescet.

Axioma 3. in vecte circulari semicirculo minori cujus centrum est centrum terræ (hoc enim in nostro vecte semper intelligendum) si punctum suspensionis inæqualiter vectem dividat, & ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compositum sed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis; hoc patet etiam ex vestris positionibus, cum enim totus vectis sit semicirculo minor, sinus minoris portionis erit minor sinu majoris portionis, ideoque non negabitur inclinationem fieri ex parte majoris portionis.

His suppositis exponatur figura continens vectem DEG , & perficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam, grave in D dispositum per partes æquales in portiones BC , CD , DE , EF , gravitat super rectam DN , nam suspensum à puncto D , per secundum axioma quiescit, ergo per primum gravitat super DN , igitur sive totum sit in D , sive dispositum per partes æquales in portiones BC , CD , DE , EF , semper super eandem rectam DN gravitat, similiter grave in G , sive totum sit in G , sive per partes æquales FG , GH , disponatur semper super eandem rectam GN gravitabit, cum autem gravia per partes æquales BC , CD , DE , EF , FG , GH disposita sint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis super rectam EN ; ergo patet conclusio, aut per deductionem ad absurdum inde facillimè derivatur ope 3. axiomatis.

Eadem certè erat Archimedis ratiocinatio, nam rectæ BD , centrum gravitatis verbi gratiâ in C constituit ut probet gravia æqualia in punctis B & D , super rectam CN gravitare, quod ille supponit cum in librâ tantum DEF hoc verum sit quæ ad rectam EN , est perpendicularis, in reliquis falsum, quia ad angulos inæquales à rectis à centro terræ secantur, in nostro autem vecte hæc difficultas non occurrit cum semper & in quocumque puncto rectæ à centro terræ eum normaliter secent. Sit libra DCB , centrum terræ A , centrum libræ C , compleatur circulus centro C intervallo CB , descriptus & DEA , BA , CEA , jungantur, jungatur & CE , ponantur in punctis B & D , pondera æqualia & sit angulus ad CD , major angulo ACB , aio libram à puncto C , suspensam ad partes B inclinari idque per supposita ab Archimede; pondus à puncto D ad punctum E , transferatur ex Archimede, idem est ac si pondus esset in puncto D , quia ponitur in recta, punctum D , & centrum terræ conjungente, si igitur intelligatur recta CE , pondus in E retinere, manebunt ex Archimede brachia CE & CB , cum ponantur manere CB & CD ,

igitur anguli $E C F, F C B$, erunt æquales: triangulum enim æquicrurum in cuius extremis æqualia pondera collocantur, movetur semper donec perpendicularis horizontis, hoc est recta verticem & centrum terræ conjungens angulum ad verticem biseccet, quod experientia testatur; Angulus autem $E C B$ duplus est anguli ad D , ergo angulus $F C B$, angulo D est æqualis, parallelæ igitur erunt $C A$ & $D A$, quod est absurdum, non ergo quiescit libra, sed ad partes B inclinatur quia angulus $B C F$, major est angulo $E C F$, ut patet. Voilà en peu de mots ma replique pour le second levier, laquelle j'eusse plus estenduë si le temps m'e le permettoit, que si le levier est plus grand que le demi-cercle comme $C A B$ duquel le point de suspension est A , les extremités $C B$, alors le levier ne soutiendra plus, mais sera pressé en haut par ces deux poids, de sorte qu'il faut prendre la proportion reciproque des deux angles $C N D, D N B$, apres avoir prolongé la ligne $A N$, la demonstration en est aussi aisée que celle du premier cas.

Pour le premier levier, soit le centre de la lettre B , les poids égaux A , & C , & la ligne $B C$ plus grande que $B A$. Si vous m'accordez que ce poids en C pese plus qu'en A (quoy que vous estimiez qu'il soit mal-aisé d'en determiner la proportion) mes affaires sont faites; Car il descendra donc, & la même raison ayant toujours lieu jusques à ce que la ligne $C B$ soit égale à $B A$, il ne s'arrêtera pas plutôt: & que cela se fasse par attraction ou autrement, la chose est indifferente.

Toutefois je vous puis assûrer que je puis prouver cette même proposition par des experiences que vous ne sçauriez contester, & que je vous enverray au long dès que la commodité me le permettra, cependant voicy une de mes propositions Geometriques, puis qu'il semble que vous ayez désiré d'en voir.

Sit Parabola $A B$, cujus vertex A & circa rectam $D A$ stabilem figura $D A B$ circumvertatur, describetur conoïd parabolicus Archimedæus cujus proportio ad conum ejusdem basis & verticis erit sesquialtera; quod si circa stabilem $D B$ figura $D A B$ circumvertatur, fiet novus conoïd cujus proportio ad conum ejusdem basis & verticis quæretur, eam nos esse ut 8, ad 5, demonstravimus, nec res vacabat difficultate. Imò & centrum gravitatis ejusdem conoïdis invenimus.

J'ay trouvé beaucoup d'autres propositions geometriques, comme la restitution de toutes les propositions de locis planis, & autres, mais ce que j'estime plus que tout le reste est une methode pour determiner toutes sortes de problemes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention maximæ & minimæ in omnibus omnino problematibus, & ce par une equation aussi simple & aisée que celles de l'analyse ordinaire; il y a infinies questions que je n'aurois jamais peu résoudre sans cela, comme les deux suivantes que vous pouvez essayer si vous voulez.

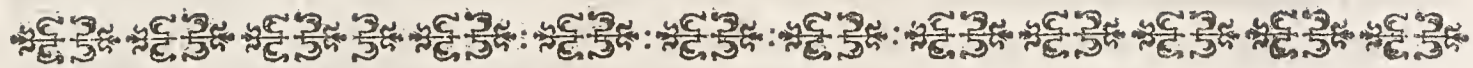
Data Sphæræ inscribere conum omnium inscribendorum ambitu maximum.

Data Sphæræ inscribere Cylindrum omnium inscribendorum ambitu maximum.

J'entens per ambitum, non seulement superficies conicas & cylindricas, mais le circuit entier compris au cone du cercle de la base & de la superficie conique, & au cylindre des deux cercles des bases & de la superficie cylindrique.

Il semble que ces deux questions sont nécessaires pour une plus grande connoissance des figures isoperimetres.

Cette methode ne sert pas seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres, & pour les nombres & pour les quantitez. Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de vostre esprit, & de me croire, &c.



*A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques
à Paris.*

MONSIEUR,

Après vous avoir remercié de la faveur que vous m'avez faite, & de la peine que vous avez prise, je réponderay en peu de mots aux objections que j'ay trouvé dans votre Lettre & ce sans aucun esprit de dispute, & pour vous faire seulement approuver la verité de mes propositions:

La premiere objection consiste en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux descendans librement s'aille unir au centre du monde; en quoy certes il me semble que vous faites tort à la lumiere naturelle & aux premiers principes: car puis que ces deux poids sont égaux, & qu'ils ont tous deux même inclination pour s'unir au centre du monde s'ils n'estoient pas empêchez, il est clair qu'ils y approcheront tous deux également, autrement ayant supposé les poids égaux & les inclinations au centre égales, vous admettriez neantmoins plus de résistance d'un costé, ce qui seroit absurde, & n'importe d'alleguer un levier horizontal, lequel estant pressé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure neantmoins en l'estat qu'il est; quoy que l'appuy qui est au dessous le divise en parties inégales, car au cas de ma proposition, la verité de mon principe depend de ce que les deux poids ou puissances, ont naturellement inclination au centre de la terre, & tendent là; & c'est pourquoy n'ayant point d'avantage l'un sur l'autre ils s'y approchent tous deux également; mais en l'espece du levier horizontal les deux puissances des extremitéz n'ont aucune inclination naturelle à l'appuy, mais à s'approcher seulement, & ainsi l'appuy ne doit être non plus considéré que s'il n'estoit point, outre que jamais personne n'a doûté que le centre d'un grave ne s'unît au centre de la terre s'il n'estoit empêché: or deux graves joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité ne sont censés constituer qu'un seul grave, duquel le centre de gravité est au mitan de la ligne qui les conjoint; quelle raison donc de croire qu'il s'arreste ailleurs, que lors que son centre sera uny à celui de la terre? soint les deux poids égaux A & B joints par la ligne AB, le centre de la terre C, qu'on laisse cheoir librement les poids A & B, lors que le poids B sera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arreste, parce que les poids A, gravitat super B, & destruit æquilibrium; où commencera donc le levier AB de s'arrester? vous ne scauriez trouver le commencement de son repos en un point plutôt qu'en l'autre, si ce n'est au mitan, parce qu'il se trouve pour lors également contrebalancé de tous côtez, je ne sçay si ces raisons seront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui suivent votre opinion, & qui ne m'accordent ce principe: c'est pourquoy je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en semble.

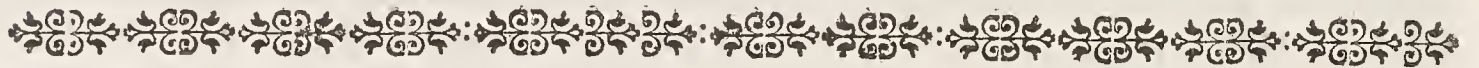
La deuxieme objection est contre la nouvelle proportion des angles que j'ay découverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de precis, mais seulement que vous avez démontré que la proportion reciproque des poids doit estre expliquée non pas par les angles, mais par les sinus de ces angles. Voicy la démonstration de ma proposition de laquelle vous verrez aisement par conséquent celle de toutes celles que vous avez veües dans l'écrit que j'envoya à Monsieur de Carcavi.

Sit centrum terræ A, vectis CNB, portio circuli centro A intervallo AN descripti CN, CB æquales circumferentiæ & in punctis CB æqualia pondera, supponimus vectem CB à puncto N suspensum manere idemque accidere si gravia

æqualia in quibuslibet punctis brachiorum $C N$, $N B$ collocentur, modò hujusmodi puncta ex utraque parte æqualiter à puncto N distent neque enim destruent, æquilibrium pondera æqualia à centro terræ & à centro vectis sive libræ æqualiter distantia, sit centrum terræ A , vectis sive libra $E F B C D$, ut supra centrum sive medium libræ punctum B , collocetur pondus B , in puncto B , aut diviso pondere B , in partes æquales $E F B C D$, collocentur eæ partes in punctis $E F B C D$, & sint intervalla $E F$, $F B$, $B C$, $C D$, æqualia, supponimus pondus B , in puncto B collocatum & à puncto B , suspensum idem ponderare ac partes $E F B C D$ simul sumptæ in vecte collocatæ & ab eodem puncto B suspensæ, illud nempe accidit quia propter circumulum $E F B C D$, partes ponderis B , eandem semper servant distantiam à centro terræ ac pondus ipsum integrum B , quod non animadvertisse & descensus gravium parallelos supposuisse errorem peperit Archimedæum. His suppositis propositionem nostram demonstramus & cum tantum casum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter à centro terræ distant, quia hic casus veritatem prioris vectis Geostatici non supponit, de qua videaris ambigere; sit vectis $F H$, in cujus centrum H , extrema F , & M , in eadem quo punctum H , à terræ centro distantia, centro A , intervallo AH , describatur portio circuli $F H M$, vectis extrema committens & sit grave in F , ad grave in M , in proportione reciproca circumferentiæ $M G$, ad circumferentiam $H A$, aio vectem $H F M$, à puncto H , suspensum mansurum & æquilibrium constituturum, hanc autem proportionem eandem esse quæ angulorum ad centrum A , patet ex constructione & duobus axiomatibus præcedentibus facillimè theorema concludes.

La hâte du Courrier me fait finir là, parce que je ne doute pas que vous ne puissiez voir la conclusion avec un peu de meditation.

Au reste je vous puis assûrer que le Livre qu'il vous a plû m'envoyer est ce que j'ay veu de plus ingenieux sur cette matiere, mais si mes propositions sont vraies, dequoy peut-être vous ne doutez pas toujourns, vous m'accorderez que ce mouvement sur les plans inclinez se peut prouver encore plus precisement, ce n'est pas que je n'estime autant que je dois vôtre invention; Mais ce que le Chancelier Bacon a dit est bien vray, multi pertransibunt, & augebitur scientia. Je suis, &c,



*A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques
à Paris.*

Du 16. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je me trouvoy ces jours passez à la campagne lors que je répondis à vostre écrit, que j'avois pourtant laissé en cette Ville. Depuis mon retour je l'ay consideré plus exactement, & vous envoie la réponse plus précise à tous ses points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raisons sur le second, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonstration de vostre proposition suivant l'opinion où vous estes, que les graves gardent la proportion reciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier sur les pendans, & de laquelle je doutezay toujours jusques à ce que je l'auray veüe. Je vous puis pourtant assurez que je ne scaurois démordre encoré de la mienne, & qu'il me semble que vous ne scauriez démonstrer la vostre, au moins par les prin-

cipes que nous connoissons, permettez moy de changer de matiere, & de vous demander la demonsturation de cette proposition que j'advoie franchement que je n'ay encore sceu trouver, quoy que je sois assure que'elle est vraie.

Summa quadratorum à duabus rectis rationalibus longitudine commensurabilibus, si ad duplum summæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo excessus erit apotome.

Vous ne sçauriez croire combien la science du dixième Livre d'Euclide est deffectueuse, je veux dire que cette connoissance n'a pas encore fait de grands progres; & qu'elle est pourtant de grandissime usage. J'y ay decouvert beaucoup de nouvelles lumieres, mais encore la moindre chose m'arreste, comme le Theoreme que je viens de vous écrire qui semble d'abord plus aisé à démonstrer qu'il n'est pas, j'attends de vos nouvelles, & suis, &c.

Le principe que je vous ay demandé pour l'établissement de mes propositions Geostatiques est, que si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme, & de soy sans poids; & qu'estant ainsi disposez ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne s'unisse au centre commun des choses pesantes, ce principe qui vous a semblé plausible d'abord, a enfin choqué vôtre opinion sur ce principalement que nous ignorons la cause radicale, qui fait que les corps graves descendent, sur quoy vous dites qu'il y a trois opinions differentes, & que de toutes les trois les consequences semblent differentes.

Je ne repeté point vos mots, ny vos raisons, je me contente d'y répondre; & primò en la premiere opinion.

En vôtre figure vous dites qu'il vous semble que si le point D, ou E, convient avec le centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre ils contrepeseront encore, & demeureront en equilibre. Puisque, dites vous (pour me servir de vos propres termes) ces deux poids sont égaux, & ont tous deux même inclination de s'unir au centre commun des choses pesantes, l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu.

Or si ce raisonnement est bon, voyez-le dans la figure suivante dans laquelle j'employeray les mêmes mots.

Soit le centre de la terre D, un point dans sa surface ou ailleurs C, soit jointe la ligne CD, & soit au point C, attaché le levier BC, CA, duquel les bras BC, CA, soient égaux & les poids B & A aussi égaux, l'angle BCA fermé. S'il n'y avoit point de poids en B, la ligne CA s'uniroit à la ligne CD, c'est à dire que le poids A s'aprocheroit du centre D, autant qu'il pourroit, & tout de même de la ligne BC, soit fait l'angle BCD moindre que DCA, par le precedent raisonnement, le levier s'arrestera (ce qui est contre l'experience) puis que les deux poids A & B sont égaux, & ont tous deux même inclination de s'unir au centre D, sive à la ligne CD, & l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu; or de même qu'en ce cas l'experience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D, & de la ligne CD, il ne faut pas douter qu'au premier cas ils n'aprochent également du centre de la terre, & la raison de toutes ces deux propositions est, qu'ayant même inclination au centre, & ne pouvant tous deux y descendre, à cause qu'ils s'entrepêchent, ils y approchent du moins également, autrement la force de celui qui y approcheroit d'avantage seroit plus grande.

L'exemple du levier horizontal ne fait rien à la question; car pour marquer que les poids B & A n'ont pas leur inclination au point C, il ne faut qu'ôter la ligne CD, sur laquelle le levier s'appuye, & le levier ne restera pas de demeurer s'il est pressé par les poids A & B horizontalement, de sorte que le point C n'est non plus considerable que tel autre de ligne BA, que vous prendrés; & cela estant l'exemple est inutile:

parce que la principale raison de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

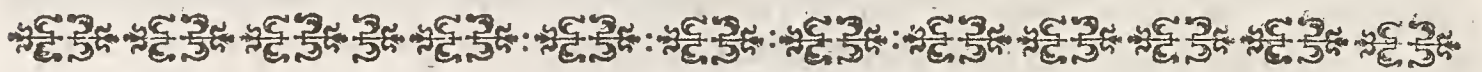
Ce que vous adjoutez de deux poids, qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme, & de foy sans poids, n'est non plus recevable; car vous accordant que lors que vous niez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids comme vous faites en vôtre figure, il est certain qu'en ce cas, il y a de chaque costé du centre une grandeur égale. Il arrive pourtant cent cas, auxquels si vous coupez les deux poids par un autre plan passant par le centre, les grandeurs qui seront de chaque costé seront inégales, & ainsi un même corps en même temps arrêtera & n'arrêtera pas, & n'importe de dire que ce plan doit être toujours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves; car vous sçavez qu'autour du centre tous endroits sont indifferens, & omnia intelliguntur sursum, omnia deorsum, il faut donc necessairement prendre les repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion reciproque suivant mon sentiment.

Voilà en peu de mots la réponse à vôtre premiere opinion que j'eusse peu étendre d'avantage & tirer même la demonstration de mon principe de l'experience que je vous ay donnée, comme il vous sera aisé de voir.

Si la seconde opinion est vraie mon principe est infallible; car en ce cas vous dites que le corps pesera d'autant moins qu'il sera proche du centre, mais cette diminution ne sera pas en la raison des éloignemens.

Or puis qu'un corps pese moins en ce cas à mesure qu'il est plus proche du centre, donc il sera toujours pressé par le plus éloigné, jusques à ce qu'ils soient également éloignez du centre.

En la 3. opinion les mêmes raisons sont bonnes, je seray bien aisé que Monsieur Pascal voye ma Lettre, si vous l'agreés.



*A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques
à Paris.*

Du 22. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je surseoieray avec vôtre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Mechanique jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres; ce que j'attends au plûtôt sur la promesse que vous m'en faites. Sur le sujet de la methode de maximis & minimis, vous sçavez que puisque vous avez veu celle que Monsieur Despagnet vous a donnée, vous avés veu la mienne que je luy baillay il y a environ sept ans étant à Bourdeaux, & en ce temps là je me ressouviens que Monsieur Philon ayant receu une de vos Lettres, dans laquelle vous luy proposiez de trouver le plus grand Cone de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné, il me l'envoya, & j'en donnay la solution à Monsieur Prades, pour vous la rendre, si vous rappelez vôtre memoire, vous vous en souviendrez peut-être, & que vous proposiez cette question comme difficile, & ne l'ayant pas encore trouvée. Si je rencontre parmi mes papiers vostre Lettre, que je garday pour lors, je vous l'envoyeray. Si Monsieur Despagnet ne vous a proposé ma methode que comme je la luy baillay pour lors, vous n'avez pas veu ses plus beaux usages. Car je la fais servir en diversifiant un peu, Premièrement pour l'invention des propositions pareilles à celle du Conoide que je vous envoyay par ma derniere. 2. Pour l'invention des tangentes des lignes courbés, sur lequel sujet je vous propose ce probleme, ad datum punctum in conchoide

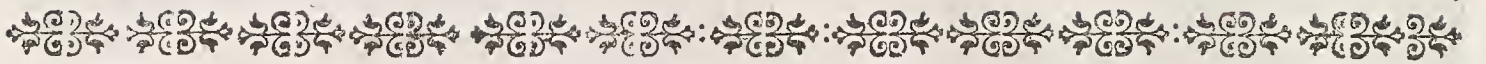
conchoide Nicomedis invenire tangentem. 3. Pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures aux figures mêmes différentes des ordinaires comme en mon Conoide & autres infinies, dequoy je fairay voir des exemples quand vous voudrez. 4. Aux problemes numeriques, ausquels il est question de parties aliquotes, & qui sont tous tres-difficiles. C'est par ce moyen que je trouvoy 672. duquel les parties sont doubles aussi bien que celles de 120. le sont de 120, c'est aussi par là que j'ay trouvé de nombres infinis qui sont la même chose que 220. & 284. c'est à dire que les parties du premier égalent le second, & celles du second le premier, dequoy si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont 17296. & 18416. je m'assûre que vous m'advoierez que cette question & celles de sa sorte sont tres-mal-aisées: j'en envoyay il y a quelque temps la solution à Monsieur de Beaugrand; j'ay aussi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui surpassent d'un nombre donné leurs parties aliquotes & plusieurs autres. Voilà quatre sortes de propositions que ma methode embrasse, & que peut-estre vous n'avez pas scéies: sur le sujet du premier j'ay quarré infinies figures comprises de lignes courbes, comme par exemple si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du Diametre, cette figure approchera de la parabole, & ne differe qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarez, je prends en celle-cy celle des cubes (& c'est pour cela que Monsieur de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition, l'appelle parabole solide) or j'ay démontré que cette figure est au triangle de même base & hauteur, en proportion sesquialtere. Vous trouverez en la sondant qu'il m'a fallû suivre une autre voye que celle d'Archimede en la quadrature de la parabole, & que je n'y fusse jamais venu par là. Puisque vous avez trouvé ma proposition du Conoide excellente, la voicy plus generale.

Si circa rectam DA parabole (cujus vertex B & axis BF & applicata AD) circumducatur, fiet conoides novæ speciei, quo secto bifariam plano ad axem recto, dimidium ipsius ad conum ejusdem basis & altitudinis est ut 8. ad 5. Si verò plano secetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E , segmentum conoidis $ABCE$ ad conum ejusdem basis & altitudinis est ut quintuplum quadrati ED unà cum rectangulo AED bis & rectangulo sub DF , & AE ad quadrati ED quintuplum, & vicissim segmentum conoidis DCE est ad conum ejusdem basis & altitudinis ut quintuplum quadrati AE , unà cum rectangulo AED bis, & rectangulo sub DF & DE ad quadrati AE quintuplum.

Pour la démonstration, outre les aydes que j'ay tirées de ma methode, je me suis servi des cylindres inscrits & circonscrits.

J'avois obmis le principal usage de ma methode qui est pour l'invention des lieux plans & solides, elle m'a servi particulièrement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile. Si à quocumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ, & sint species quæ ab omnibus fiunt dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples; car je vous puis assûrer que sur chacun des points precedents, j'ay trouvé un tres-grand nombre de tres-belles propositions. Je vous enverray la demonstration de celles que vous voudrez. Permettez-moy neantmoins de vous prier de les essayer plutôt, & de m'en donner vôtre jugement. Au reste depuis la dernière Lettre que je vous écrivis, j'ay trouvé la demonstration de la proposition que je vous faisois, elle ma donné grandissime peine, & ne se presente pas d'abord. Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos pensées, & de me croire, &c.



Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 11. Octobre 1636.

MONSIEUR,

Je vous envoie la demonstration de la proposition fondamentale de nostre Mecha-
nique, ainsi que ie vous l'ay promis. En quoy je suivray l'ordre commun d'expliquer
auparavant les definitions & principes desquels nous nous servons.

Nous appellons en general une puissance cette qualité par le moyen de laquelle
quelque chose que ce soit tend ou aspire vers un autre lieu que celuy ou elle est, soit
en bas, en haut, ou a costé: soit que cette qualité convienne naturellement à la chose, ou
qu'elle luy soit communiquée d'ailleurs. De laquelle definition il s'enfuit que tout
poids est une espece de puissance, puisque c'est une qualité, par le moyen de laquelle
les corps aspirent vers la partie inferieure. Souvent nous appellons aussi du nom de
puissance la chose même, à laquelle la puissance convient, comme un corps pesant est
appellé un poids; mais avec cette precaution que ce soit à l'égard de la vraye puissance,
laquelle augmentant ou diminuant, sera appellée plus grande ou moindre puissance,
quoy que la chose à qui elle convient demeure toujours la même.

Si une puissance est pendue ou arrestée à une ligne flexible & sans poids, laquelle
ligne soit attachée par un point à quelque arrest, en sorte qu'elle soustienne la puissan-
ce tirant sans empeschement contre cette ligne; la puissance & la ligne prendront quel-
que position, en laquelle elles demeureront en repos, & la ligne sera droite par forces;
soit icelle ligne appellée le pendant ou la ligne de direction de la puissance; & le point
par lequel la ligne est attachée à l'arrest, soit appellé le point d'appendion, lequel
pourra estre quelquefois au bras d'un levier, ou d'une balance, & lors la ligne droite
menée du centre de l'appuy du levier ou de la balance; jusques au point d'appendion,
soit appellée la distance ou le bras de la puissance, laquelle distance ou bras nous suppo-
sons être une ligne ferme considerée de soy son poids. D'avantage l'angle compris du bras
de la puissance & de la ligne de direction, soit appellé l'angle de la puissance. Apres ces
definitions nous posons pour principe qu'au levier, & à la balance, les puissances égales
tirans par des bras égaux, & des angles de direction égaux, tireront également; & si en
cét estat elles tirent l'une contre l'autre, elles feront equilibrio; que si elles tirent ensem-
ble ou de même part, l'effet sera double.

1. Axi-
ome.

Si les puissances estans égales, & les angles de direction égaux, les bras sont inégaux,
la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet. Comme en la 1. figure le
centre de la balance, ou du levier, estant A, si les bras AB, AC sont égaux, & les an-
gles ABD, ACE égaux, les puissances égales DE, tireront également, & feront equili-
bre; de même le bras AF estant égal à AB, l'angle AFG à l'angle ABD, & la puis-
sance G à la puissance D, ces puissances G, D, tireront également, & pour ce qu'elles ti-
rent de même part, l'effet sera double: au contraire la puissance G & la puissance E,
feront equilibrio. Par le même principe les puissances I, L, contrepeseront si étans égales
les bras AK, AH sont égaux & les angles AHI, AKL aussi égaux. Il en sera de mé-
me des puissances P, R, si le tout est disposé de même. Et en ce cas nous ne mettons point
d'autre difference entre les poids & les autres puissances, sinon que les poids tendent &
aspirent tous vers le centre des choses pesantes; & les puissances peuvent estre enten-
duës aspirer vers toutes les parties de l'Univers, avec autant, plus, ou moins de for-
ces que les poids. Aussi les poids & leurs parties tirent par des lignes de direction qui
toutes concourent à un même point; & les puissances & leurs parties peuvent être

entendues tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient paralleles entre elles.

En second lieu nous posons qu'une puissance & sa ligne de direction demeurans toujours en même position; & le centre de la balance, ou du levier, de mêmes; quel que puisse être le bras mené du centre de la balance à la ligne de direction; la puissance tirant de soy toujours de même sorte, fera toujours même effet. Comme en cette 2. figure le centre de la balance estant A, la puissance B & sa ligne de direction B F prolongée, tant que de besoin, à laquelle aboutissent les bras A C, A G, A F. En cet état soit que la ligne B F soit liée au bras A F ou A C ou A G, ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction A F, nous supposons que cette puissance B fera toujours un même effet sur la balance: & si tirant par le bras A C elle fait equilibrio avec la puissance D tirant par le bras A E; lors qu'elle tirera par le bras A F, ou A G, elle fera encore equilibrio avec la puissance D tirant par le bras A E. Ce principe quoy qu'il ne soit pas expressement dans les auteurs, est neantmoins usurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, & l'experience le confirme constamment.

En troisième lieu nous posons, que si les bras d'une balance ou d'un levier sont directement posez l'un à l'autre, & qu'estans égaux, ils soutiennent des puissances égales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances peseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du même centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au même centre. Comme en la troisième figure la balance étant E D, le centre A, les bras égaux A D, A E soutenant des puissances égales H, I, desquelles les angles de direction A D H, A E I soient droits; nous supposons que ces puissances I, H, peseront de même sur le centre A que si elles étoient plus près du même centre sur les distances égales A B, A C, & encore de même que si ces mêmes puissances étoient ensemble pendues en A, ces angles de direction estans toujours droits.

Ces principes posez, nous demonstons facilement, imitans Archimede, que sur une balance droite, les puissances desquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction sont paralleles entre elles, & perpendiculaires à la balance, contrepeseront & feront equilibrio, quand les mêmes puissances seront entre elles en proportion reciproque de leurs bras, ce que nous pensons vous être aussi facile qu'à nous. En suite de quoy nous demonstons cette proposition universelle, à laquelle nous butons.

En toute balance ou levier si la proportion des puissances est reciproque à celle des lignes perpendiculaires du centre ou point de l'appuy, sur les lignes de direction des puissances, ces puissances tirans l'une contre l'autre feront equilibrio: & tirans d'une même part, elles feront un pareil effet; c'est à dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance. Soit en la 4. figure le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C; & soient premierement les lignes de direction B D, C E perpendiculaires aux bras A B, A C; par lesquelles lignes tirent les puissances D E, (lesquelles seront des poids si on veut) & qu'il y ait même raison de la puissance D à la puissance E que du bras A C au bras A B, les puissances tirans l'une contre l'autre: je dis qu'elles feront equilibrio sur la balance C A B. Car soit prolongé le bras C A jusques en F, en sorte que A F soit égale à A C, & soit considérée C A F comme une balance droite de laquelle le centre soit A: soient aussi imaginées deux puissances G, H, desquelles, & de toutes leurs parties, les lignes de direction soient paralleles à la ligne C E; & que la puissance G soit égale à la puissance D, & la puissance H égale à la puissance E, l'une sçavoir G tirant sur le bras A F; & l'autre sçavoir H tirant sur le bras A C. Lors par la premiere proposition, les puissances G, H, feront equilibrio sur la balance C A F. Mais par le 1. principe la puissance D sur le bras A B, fait le même effet que la puissance G sur le bras A F; partant la puissance D sur le bras A B fait equilibrio avec la puissance H sur le bras A C; & la puissance H tirant de même que la puissance E sur

le bras AC par le même premier principe, la puissance D sur le bras AB , fera équilibre avec la puissance E sur le bras AC . Maintenant en la 5. fig. soit le centre de la balance A ; les bras AB , AC ; les lignes de direction BD , CE qui ne soient pas perpendiculaires aux mêmes bras; & les puissances D , E , tirans par les mêmes lignes de direction; sur lesquelles lignes soient menées des perpendiculaires du centre A , sçavoir AF sur BD & AG sur EC ; & que comme la ligne AF est à AG ainsi soit la puissance E à la puissance D , lesquelles puissances tirent l'une contre l'autre, je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB . Car soient imaginées les lignes AF , AG comme les deux bras d'une balance $GA F$, sur lesquels tirent les puissances D , E , par les lignes de direction FD , GE , ces puissances feront équilibre par la première partie de cette 2. prop. Mais par le 2. principe la puissance D sur le bras AF fait le même effet que sur le bras AB ; & la puissance E sur le bras AG fait le même effet que sur le bras AC ; partant la puissance D sur le bras AB , fait équilibre avec la puissance E sur le bras AC . Il y a plusieurs cas suivant les cheutes des perpendiculaires, mais il vous sera facile de voir que tous n'ont qu'une même démonstration. Il est aussi facile de démontrer que si les puissances tirent de même part, elles feront même effet l'une que l'autre, & l'effet des deux ensemble sera double de celui d'une seule.

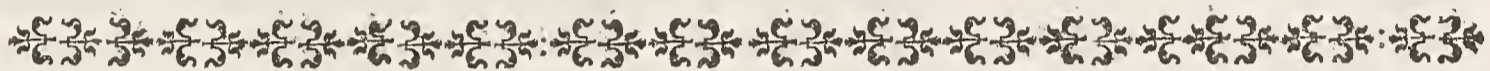
J'attens votre jugement sur cette démonstration, & si vous l'approuvez nous communiquerons en suite des conséquences qui en dépendent. J'ay trouvé la démonstration de la somme des quarrés de deux costez rationaux commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des costez, excédant d'une figure quarrée: mais puis que vous l'avez aussi trouvée, je ne vous diray ici que mon principal fondement, qui est que de deux nombres quelconques, la somme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du second, & deux fois le produit des deux nombres, n'est pas un nombre quarré, d'autant que prenant les moindres nombres de leur raison, un nombre simplement pris n'est pas quarré. Si nous avons tous deux un même moyen, ce cy suffit, si vous en avez un autre, ce que vous reconnoîtrez par ce discours, vous me ferez faveur de me l'apprendre, & moy je vous écriray le mien tout au long, si vous le desirez.

J'ay aussi trouvé la démonstration de votre conoïde, & celle de votre parabole solide, & en conséquence, celles d'une infinité d'autres pareilles quarré-quarrées, quarré-solides, &c. J'ay trouvé les tangentes de toutes ces figures: par exemple en la parabole solide la portion de l'axe, prise entre la tangente & le sommet, est double de la portion du même axe, prise entre le sommet & la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe. J'ay par le même moyen quarré la parabole géométriquement autrement qu'Archimede. Et je me trompe fort si je n'ay rencontré le même moyen que vous, me servant des lignes parallèles à l'axe, & des portions de ces lignes, prises entre les paraboles & la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes, &c. Or la somme des quarrés est toujours plus que le tiers du cube qui a pour costé le costé du plus grand quarré: & la même somme des quarrés, le plus grand étant osté est moindre que le tiers du même cube. La somme des cubes plus que le quart du quarré-quarré; & le plus grand cube osté, moins que le quart, &c. Si par ce discours vous reconnoissez que ce n'est pas votre moyen, j'en seray d'autant plus réjoui pour ce que nous en aurons deux, & vous me ferez la faveur de m'envoyer le vôtre faisant le même de ma part.

Pour les tangentes de la conchoïde, je les ay considérées il y a long-temps, comme étans déterminations d'équations quarré-quarrées. Sur ce sujet il y a deux points en la conchoïde, par lesquels on ne peut mener des tangentes, je vous prie de les considérer, & vous trouverez une admirable propriété d'angles au sommet l'un de l'autre à la section d'une ligne droite & de la conchoïde.

J'estime vos propositions des nombres, & celle du lieu plan fort difficiles ce que je sçauray mieux quand j'auray eu le loisir de les considérer, comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides; n'estant pas resolu pourtant de m'obstiner apres; car j'aimeray mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agreable. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de vôtre demi-conoide n'est pas ce point ou l'axe est divisé, de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11. à 4. pour ce qu'un leger raisonnement, & non encor bien considéré m'a semblé me mener à cette raison.

Une autre fois je vous pourray mander de nos propositions ainsi que vous le desirez: pour cette heure que je n'employe à écrire cecy qu'un temps dérobbé, je vous envoie seulement celle-cy. De deux cones droits égaux & isoperimetres estans données les bases inégales, ou les hauteurs inégales; trouver les cones. Quand je dis isoperimetres; j'entens les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez. Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous même, & je vous l'aurois envoyé des maintenant, n'estoit que je croy que vous desirez d'avoir le plaisir d'y penser. Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire; je demeureray, &c.



Objecta à D. de Fermat,

Adversus propositionem Mechanicam D. de Roberval.

SI vera esset propositio Mechanica D. de Roberval, in vecte quolibet, pondera perpendicularis à centro vectis in lineas directionum demissis esse reciprocè proportionalia ad astruendam quietem, non posset subsistere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato; quam in libello suo tradidit. Hoc perspicuè demonstramus.

In 1. figura; esto punctum in superficie telluris N, centrum terræ H, junctâ NH; ducatur ANGF, perpendicularis ipsi HN, quam quidem ANGF, ii qui sunt in puncto N, vocant parallelam horizonti. Exponantur sphaeræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam sive planum per ANGF, in punctis N, G, F.

Patet primùm Sphaeram B, à minima potentia moveri; idque D. de Roberval non diffiteretur, & in puncto N collocatam, manere; sed in nullo alio totius plani puncto idem accidit. Perficiatur figura ut hic vides. Recta HG, connectens punctum contactus G, & centrum terræ H; ad rectam CG, facit angulum obtusum ideoque sphaera C, ad partes GN, movebitur. Idem de sphaera D. Sit igitur potentia in Z, retinens sphaeram C; per motum rectæ ANGF, parallelum aut quod idem est per rectam ZC. Intelligitur vectis cujus centrum fixum G, ducatur in HC, perpendicularis GC. Sphaeræ C, motus naturalis est per rectam CH. Motus retinens per CZ ad quam perpendicularis est GC. Ergo ex suppositis D. de Roberval est reciprocè ut recta GI, ad rectam GC; ita potentia retinens in Z ad sphaeram C, quod erat demonstrandum. In sphaera autem D, major requiretur potentia ad retinendum, & quo magis distabit à puncto N, eò majore potentia opus erit, quod est mirabile.

Ex suppositione autem D. de Roberval numquam in eodem plano variat proportio; quod quam longe abeat à veritate ipse viderit.

Sit centrum terræ B; Planum inclinatam ACD, in punctis A & C, eandem potentiam retinere, poterat fortasse non incongruum videri D. de Roberval. Sed ducto perpendiculari BD, cum in puncto D sit quies, & minima potentia retineat, qua ratione constabit ipsius propositio?

In quolibet autem plano habet locum nostra demonstratio. Omne quippe planum alicui horisonti invenietur parallelum.

Hac propositione evertitur demonstratio Domini de Roberval & brevissimâ viâ ad ipsius hypothesen nova proportio detegitur.

Secundam figuram addideramus, qua iudicium nostrum de ipsius ultima propositione prodere sperabamus. Sed non suppetit tempus.



Nova in Mechanicis Theoremata D. de Fermat.

FUNDAMENTA Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus, supposuisse enim motus gravium descendantium inter se parallelos patet, nec vero absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes: Non inficior quidem hypothesim hanc ad sensum proximè accommodari, quippe propter magnam à centro terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli non secus ac radij solares: sed veritatem intimam & accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt. Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda & astruenda ideoque nova in mechanicis fundamenta è veris & proximis principiis accersenda: Hujus novæ scientiæ propositiones tantùm exhibemus, demonstrationes cum libuerit, tradituri.

Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius consideramus unum cujus motus rectus tantùm est non circularis, alterum cujus extrema describunt circulos, de secundo hoc quæsitum tantùm apud veteres; primum quod longè videtur simplicius, nè agnoverunt quidem.

Singula exemplis illustramus & prioris quidem centrum idem est cum centro terræ, posterioris centrum extra centrum terræ necessariò debet collocari.

Sit igitur in sequenti figura centrum terræ punctum A, & intelligatur recta CB, transire per centrum A, imò & ipsa AB, intelligatur esse vectis & in punctis B & C, collocentur gravia B & C, sitque pondus B, ad pondus C, ut recta CA, ad rectam AB, aio vectem CB, mansurum & æquilibrium in hoc casu constitutum. Si vero deminuaturs tantisper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes C, donec pondera distantis à centro sint reciprocè proportionalia. Hæc est prima propositio cujus respectu terra ipsa magnus vectis dici potest ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

Hoc posito, mirabilius quiddam proponimus, gravia nempe è facilius tolli à potentia in superficie terræ aut alibi constituta quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A punctum C, extra centrum jungatur recta CA, in qua sumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B, per filum aut axem CB, suspensum, detinebitur à potentia in C, collocata cujus proportio sit ad pondus B, ut recta AB, ad rectam AC.

Indeque facillimè deducitur & demonstratur gravia in centro non ponderare, cujus rei demonstrationem hæctenus quæsitam jam novimus.

Secundùm vectium genus Archimedæum dici potest. Sed reciproca distantiarum cum ponderibus proportio (quam in vecte simplici demonstravimus) in hoc habere locum non potest, nec ideò subsistere sexta & septima Archimedis propositio.

Ita igitur confidenter pronuntiamus & vectem generaliter sive brachia, sive in directum, sive parallela horisonti, sive etiam angulum constituent, consideramus.

Una quippe demonstratione totum evincimus. Sit vectis extra centrum terræ DBC, cujus centrum B, Brachia BD, & BC, centrum terræ A, jungantur rectæ DA, BA, CA, &

in punctis B & C, collocentur gravia, sitque proportio gravis D, ad grave C, composita ex proportione rectæ DA, ad rectam CA, & reciprocè ex angulo CAB ad angulum BAD. Aio vectem BDC à puncto B suspensum mansurum & æquilibrium constitutum.

Hanc propositionem sicut & reliquas verissimas asseveramus, & cum libuerit, demonstrationibus ex puriore Geometria & Physica derivatis confirmabimus.

Inde patet corruere omnino veterum de centrīs gravitatum definitiones, nullum quippe corpus præter Sphæram potest reperiri in quo punctum reperiatur à quo grave extra centrum terræ suspensum, servet eam quam in principio habuerit positionem.

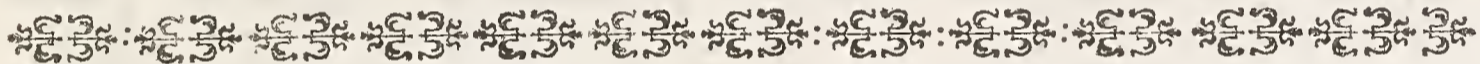
Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujusque corporis, punctum intra corpus positum, quod si cohæreat centro terræ, corpus eam servabit quam in principio habuerit positionem: eo enim solum casu habent locum centra gravitatis.

Demonstrabitur etiam & refelletur error Ubaldi & aliorum qui existimant libræ brachia licet non sint parallela horizonti æquilibrium tamen constitutura.

Sit centrum terræ B, semidiameter BA, portio alterius semidiametri BC, & fiat ut AB, ad BC, ita pondus appensum in C ad pondus appensum in A. Aio pondera AC non moveri, sed fieri æquilibrium, hæc autem propositio probatu facillima est vestigiis Archimedis insistendo. Et, si negetur, statim demonstrabitur.

Hoc supposito, propositionem sanè mirabilem inde deducimus. Ponatur grave in puncto N, inter puncta A & B, & fiat ut AB ad BN ita pondus N ad potentiam R. Aio pondus N juncto axe AN à potentia R in puncto A collocata detineri, & si minimùm augeatur potentia R, sursum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.

Hæc est, ni fallor, propositio quam Beaugrandus in sua Geostatica demonstrat; nos eam hac ratione, quæ sequitur, demonstramus.

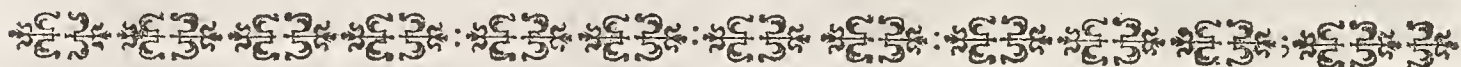


Propositio Geostatica D. de Fermat.

Suppositis & concessis quibus in demonstratione utimur, ex præcedente propositione, & ex communibus notionibus desumptis.

Sit centrum terræ C, semidiameter CA in qua sumatur punctum B, in puncto autem B sit quodvis grave appensum. Fiat autem ut recta CA, ad rectam CB, ita pondus in B appensum ad potentiam aliquam ut R. Aio grave B à potentia R in puncto A sustineri, & si augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujusmodi auctâ potentiâ in puncto A collocatâ sursum moveri, producat enim AC in D, & sit CD, æqualis CB. Et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B & D compositi centrum gravitatis est C, ideoque si à puncto A auferatur potentia R, cum recta BA, nihil ponderet, erunt pondera B & D in æquilibrium & manebunt. Si autem in A, collocetur pondus deorsum tendens potentiæ R sursum moventi æquale, idem est ac si à puncto A dematur potentia R, nam quantum potentia tollit tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujusmodi pondus in A, corpus igitur compositum ex potentia R collocata in A, & sursum movente, ex pondere A, deorsum tendente, & ex gravibus B & D erit in æquilibrium, aut, si mavis, non movebitur. Cum autem grave D, sit æquale gravi B & recta CD rectæ CB, erit ut AC ad CD; ita AC ad CB, & ut pondus B ad potentiam R in A collocatam, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens (quod ipsi R potentiæ æquale posuimus) est autem ex hypothesi ut recta AC ad CB, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam. Erit igitur ut AC ad CD, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens. Cum igitur distantia ponderibus sint reciprocè proportionales

pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit. Si verò ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt. Ergo si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata & sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente & ponderibus B & D composito, auferatur æquilibrio ex ponderibus A & D compositum, reliqua æquiponderabunt, aut potius non movebuntur. Auferantur igitur pondus A & pondus A D. Remanebit potentia R in A collocata, & pondus B. Quod proinde potentia R detinebit. Ideoque si minimâ augeatur vi, sursum tollit G E D.



Propositio D. de Fermat circa parabolam.

Proposui per data 4. puncta parabolam describere. Duplex est casus, utriusque lemma sequens præmittendum.

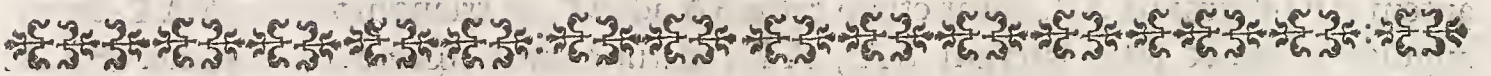
Sit parabole in 1. fig. E C B A D cujus diameter A F detur positione, dentur etiam duo puncta B & C, per quæ transit parabole, dentur denique anguli applicatarum ad diametrum A F. Aio parabolam positione dari. Applicentur ordinatim B N & C M, à puncto dato B in A F, positione datam ducitur B N in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) ergo datur punctum N, similiter datur punctum M & rectæ B N, C M positione & magnitudine; Ex natura parabole est ut quadratum C N ad quadratum B N, ita M A ad N A, si ponas A esse verticem parabole sive extremum diametri. Ergo datur ratio M A ad N A & dividendo datur ratio M N ad N A, datur autem recta M N, quia duo puncta M, N dantur, datur igitur N A & punctum A. Si fiat ut A N data ad N B datam, ita N B ad Z, dabitur Z rectum parabole latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, A F diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52. 1. Apoll.

Hoc supposito facillimè constructur primus casus in 2. fig. in qua dentur 4. puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas, B C, C F, F D, D B, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel ut in hoc casu erit B C verbi gratia parallela D F. Bifariam utraque dividatur in punctis I & E & sit factum, ergo juncta I E erit diameter parabole cum æquidistantes bifariam dividat, dantur autem puncta I & E, ergo I E positione datur & angulus D E I. Cum igitur diameter I E positione detur, detur etiam angulus applicatarum & duo puncta B & D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole D B A C F.

In 2. casu major est difficultas, cum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans.

In 3. fig. sint data 4. puncta X, N, D, R, quæ per rectas X R, R D, D N, N X, jungantur, & neutra oppositarum sit alteri æquidistans. Ponatur jam factum esse, & descriptam parabolam X A N D B R, proposito satisficientem. Concurrent productæ X N, R D, in puncto V, & bifariam divisas X N, R D, in punctis M & C, ducantur ad ipsas diametri M A, C B, occurrentes parabole in punctis A, & B, à quibus rectæ I A S, S B ipsis X V, V R, ducantur æquidistantes, & concurrant in puncto S. Juncta A B bifariam dividatur in P & jungatur S P, his ita constructis patet, cum per verticem diametri M A ducatur I A S, æquidistans applicatæ X N, rectam I A S tangere parabolam in A, probabitur similiter rectam S B tangere eandem parabolam in B, ergo per 16. 3. Apoll. erit ut rectangulum X V N ad rectangulum R V D, ita quadratum A S ad quadratum S B. Datur autem ratio rectanguli X V N ad rectangulum R V D, cum dentur 4. puncta X N D R, ergo datur ratio quadrati A S ad quadratum S B, ideoque rectæ A S ad rectam S B. Datur autem angulus A S B, quia propter parallelas æquatur angulo X V R, dato. Ergo in triangulo A S B datur angulus ad verticem S & ratio laterum A S, S B, ideoque triangulum A S B datur specie, igitur datur angulus S A B & ratio S A ad A B, cum

autem



*Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval
à Paris.*

Du 4. Novembre 1636.

MONSIEUR,

Me réservant à vous écrire une autre fois les defauts que j'ay trouvé dans vôtre démonstration & dans vôtre Livre imprimé, que j'esperé vous faire avoüer par vos propres maximes, je me contenteray de répondre présentement aux autres points de vôtre Lettre, & premierement vous sçavez que nous avons concouru au même medium sur le sujet de la somme des deux quarez rationaux commensurables en longueur appliquée au double de la somme des côtez, excédant d'une figure quarrée. Vous vous estes servy aussi d'un même medium que moy en la quadrature des paraboles solides quarre-quarrez, & à l'infini; mais vous supposez une chose vraye, de laquelle vous n'avez pas peut-être la démonstration précise, qui est que la somme des quarez est plus que le tiers du cube, qui a pour costé le costé du plus grand quarré la somme des cubes plus que le quart du quarre-quarré la somme des quarre-quarrez plus qu'un cinquième du quarecube, &c. Or pour demonstrier cela generalement, il faut étant donné un nombre, in progressionem naturali, trouver la somme, non seulement de tous les quarez & cubes, ce que les Autheurs qui ont écrit ont déjà fait, mais encore la somme des quarre-quarrez quarre-cubes, &c. ce que personne que je sçache n'a encore trouvé, & pourtant cette connoissance est belle & de grand usage, & n'est pas des plus aisées, j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine.

En voicy un exemple. Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singulis fiet summa quadrato-quadratorum quintupla. Il semble que Bachet, dans son traité de numeris multangulis, n'a pas voulu tâter ces questions apres avoir fait celle des quarez & des cubes: je seray bien-aisé que vous vous exerciez pour trouver la methode generale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas je vous offre tout ce que j'y ay fait, qui comprend entierement tout ce qui se peut dire sur cette matiere. Voicy cependant une tres-belle proposition, qui peut-être vous y servira, au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une regle que j'ay trouvée pour donner la somme non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet & les autres, mais encore des pyramides, triangulo-triangulorum, &c. à l'infini, voicy la proposition.

Ultimum latus in latus proximè majus facit duplum trianguli.

Ultimum latus in triangulum lateris proximè majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proximè majoris facit quadruplum triangulo-trianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoy que belles de soy, m'ont servi à trouver les quadratures, que je suis bien-aisé que vous estimiez.

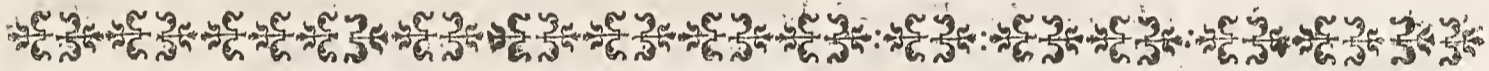
Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres que vous trouvés si difficiles, elles le sont en effet, même Tartaglia avoit creu qu'elles n'estoient point trouvables par art. J'en ay envoyé la construction, au Pere Merfenne. Il vous la communiquera si vous la luy demandez, je vous enverray aussi une autre-fois le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures, avec la methode generale pour le trouver; vous sçavez cependant que celui du demy-conoide divisé l'axe en proportion de 11. à 5. non pas de 11. à quatre, comme vous aviez creu, &

que celui des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallelogramme, qui a pour hauteur l'axe, & pour baze celle de la figure à la figure, ou pour mieux dire le diametre de toute parabole est divisé en tel point de son diametre par le centre de gravité en sorte que le segment d'en bas est à celui d'en haut, comme la figure au parallelogramme de même baze & de même hauteur,

Puis que vous avez trouvé la demonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Pere Merfenne de vous donner mes nouvelles Helices, desquelles les demonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde & des paraboles, il m'écrit qu'on doute de delà de leur verité, Vous la luy confirmerez, s'il vous plaît, & desabuserez Monsieur de qui semble ne les avoir pas creües, mais il n'en faut pas demeurer là, car pour suppleer tout ce qui semble manquer dans l'Archimede. Exponatur parabole, $A C D F$ cujus axis $D E$, basis $A F$, $C B$ parallela $D E$ & ideo perpendicularis ipsi $A F$. Circa rectam $D E$ fixam figura $A D E$, conversa constituit conoïdem Archimedeum; circa $A E$ fixam constituit nostrum conoïdem, sed si figura $A C B$, circa $A B$, fixam convertatur constituitur portio nostri conoïdis, si autem circa $C B$ fixam fiat conversio quæritur proportio novi istius conoïdis ad conum ejusdem basis & altitudinis, hoc autem etiam perfecimus. Imò mirabilius quiddam invenimus, Ellipsoïdem cui si conum æqualem inveneris dabimus circuli quadrationem. Sed hæc aliàs. Votre question des cones est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

Pour les tangentes de la Conchoïde j'ay peur que vous aurez equivoqué; car voicy ma proposition qui n'exclud aucun point, laquelle j'ay coppié sans la veriffier sur mon manuscrit, peut-être que c'est moy qui auray failli, je vous l'écriray la premiere fois.

Esto Conchois $A B C$, cujus polus F , intervallum $H A$ & in ea datum punctum B , primum asserimus eam in interiora convexam representandam, licet contrarium Pappo & Eutocio visum fuerit, deinde tangentem ita ducimus. Jungatur $F I B$ & perpendicularis $B D$, demittatur rectangulum $B F I$ unà cum quadrato $B D$ ad rectam $B D$, applicentur & faciant latitudinem $D N$, fiat ut $H D$ ad $D N$, ita $B D$ ad $D I$, juncta $Y B$ tanget Conchoïdem. J'attends votre réponse, & suis, &c.



A Monsieur de Roberval.

Du 7. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Après vous avoir asseuré, que je n'ay jamais songé de soutenir une opinion contre mon sentiment, & que je serois ravi que votre proposition mechanique feut vraye, afin que nous ne fussions plus en peine de sonder la nature par cet endroit: je m'en remettray du surplus à la lettre que j'écris à Monsieur de Carcavi, à laquelle j'adjouteray seulement, que le dernier des principes dont vous vous servez pour l'établissement de votre proposition ne me semble du tout point admissible, & que sans aucun esprit de contradiction j'estime que pour établir la proportion des poids qui se meuvent librement on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, & qu'au contraire les poids libres doivent servir de regle à tous les autres mouvemens violens, & c'est en quoy je trouve que votre principe est defectueux, outre qu'il est apparemment faux, puisque celui dont je me sers en sa place ne peut, ce me semble, être contredit, & de cela j'en fais juge qui que ce soit.

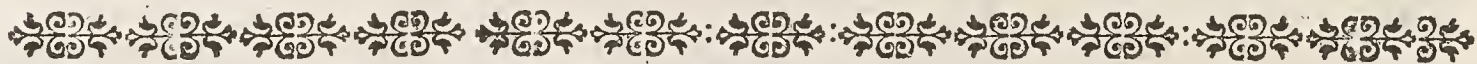
Sit vectis $B D C$, cujus medium D , centrum terræ A , sit autem recta $D A$ vecti perpendicularis. Et sint æqualia pondera B & C ad centrum terræ per rectas $B A$, $C A$,

naturaliter annuentia, suspendatur autem vectis à puncto D, & à quavis potentia retineatur. Aio idem ponderare B & C corpora ita constituta, ac si ambo in puncto D ab eadem potentia detineantur.

Car puis que la ligne B C est sans poids, & que la puissance qui est en D, abstrahit à centro, ou au contraire les poids B & C, sive sint in punctis B & C, sive in puncto D, vergunt ad centrum motu opposito, il s'ensuit clairement que la puissance qui retiendra les poids aux points B & C, les retiendra aussi en D, & viceversa.

Et n'importe d'alleguer qu'il semble que le mouvement qui se fait par des puissances paralleles à la ligne D A est aussi bien contraire au mouvement qui se fait sursum par la puissance qui retient en D. Car primò, il n'est pas si probable de dire qu'un mouvement violent est contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent est contraire au mouvement naturel. 2. Le mouvement qui se fait sur les lignes paralleles à D A, se fera sur des plans inclinez à l'horizon, & duquel la proportion sera plus inconnue que le principe, de sorte que ou il nous faut avouer la verité de mon principe, ou demonstrier le vôtre. Au premier cas je vous demonstreray ma proposition de mon second levier par vos propres maximes. J'estime que vous aurez grande difficulté au second.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'est pas icy question des mouvemens qui se font sur des plans inclinez à l'Horizon, parce que vous supposez, & je l'accorde aussi qu'en tout mouvement si la force qui retient tire à l'opposite, l'équilibre se fera lors qu'elle sera égale à la force qui tire au contraire, & qu'ainsi la puissance en D tirant à l'opposite l'effet de vôtre principe s'en ensuivra; mais je réponds que vôtre réponse seroit bonne si la puissance qui est en D étoit divisée & placée aux points B & C, & qu'elle tirât au contraire par les mêmes lignes, que les forces, que vous supposez en C & B, meuvent. Mais cela n'estant pas, excusez mon incredulité si elle ne se rend pas à vos raisons, lesquelles je souhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dedire de tout ce que j'ay fait sur ce sujet, vous protestant que jamais homme n'a esté plus docile que moy, & que lors que je reconnoistray mes fautes, je les publieray le premier avec toute franchise. J'ay esté bien-aisé de voir vôtre remarque sur la Conchoïde, & vous prie de m'en donner la demonstration, & vous souvenir que lors que je vous écrivis sur ce sujet, je le fis en doutant, & sans examiner l'écrit que je transcrivis d'un Livre où je l'avois mis il y avoit quatre ans; la construction pourtant convient au probleme & au point même de vôtre proposition si elle est vraie, ce que j'atens que vous me confirmiez, je vous prie aussi me faire sçavoir vôtre sentiment sur les autres propositions que je vous ay envoyées, & vôtre réponse sur les autres points de ma dernière Lettre, & me croire toujours, &c.



A Monsieur de Roberval à Paris.

Du 16. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Je viens de recevoir vôtre Lettre du 29. Novembre, pour réponse à laquelle je vous diray que de la methode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarez-cubes & quarequarrez je ne voy point qu'on en puisse tirer une regle generale pour l'invention de la somme omnium potestatum in infinitum, ce qui est requis à la solution de mon probleme, car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres apres avoir veu celles dont vous baillés les exemples, mais je demande une methode generale qui serve, ad omnes, potestates, comme Viete a trouvé celles des sections angulaires, vous y songerés s'il vous plaît, & j'en écriray cependant l'invention & demonstration que vous

verrez lors qu'il vous plaira. Pour ce qui est des nombres, & de leurs parties aliquotes j'ay trouvé une methode generale pour foudre toutes les questions par algebre, dequoy j'ay fait dessein d'écrire un petit traité. Je croy que vous aurez maintenant veu la construction des deux que j'ay envoyé au Pere Mersenne; car il m'écrit qu'il vous les baillera, toutes ces questions sont tres difficiles, comme vous sçavez, & n'ont esté traitées par personne, j'ay esté bien aisé d'être confirmé par vôtre lettre en l'opinion que j'avois déjà conceüe de Monsieur de.... il est pourtant vray qu'il doit avoir grande experience dans les nombres, car luy ayant par l'entremise du Pere Mersenne proposé une question que personne de ceux à qui je l'avois proposée n'avoit encore peu foudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui satisfont à la question, sans pourtant expliquer sa construction, la question est. *Invenire tria triangula rectangula numero, quorum area constituant tria latera trianguli rectanguli numero, singula nempe area singulis lateribus sint æquales*: je vous advoüeray que ce probleme me donne beaucoup plus de peine qu'à Monsieur de.... Il est vray que les nombres que j'ay trouvé sont differents des siens, & que peut-être ay-je tenu un chemin plus difficile, comme vous sçavez que ces questions ont infinies solutions, peut-être ferez vous de mon advis si vous essayez de satisfaire à la proposition.

Vous verrez aussi mes spirales, desquelles la demonstration vous sera connue tout aussi-tôt; car elle est pareille à celle des nouvelles figures que j'ay quarrées, ou auxquelles j'ay trouvé des cones égaux, & vous m'advoüerez que ces propositions illustrent pas peu la Geometrie.

Si Monsieur de Beaugrand n'a pas encore trouvé la demonstration de ces questions vous m'obligerez de luy en faire part, je luy ay écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une methode particuliere, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merueilleux jusques à ce que vous l'aurez veu, il est vray que je luy ay envoyé l'analyse seulement, & non pas la composition que je vous éclairciray une autre fois, parce qu'elle a ses difficultez & ne paroît pas d'abord par cette voye. J'ay trouvé le centre de gravité de la parabole sans presupposer la quadrature, comme a fait Archimede, & ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire, toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides, & ad superficiem, que j'ay achevées, & celles encore des parties aliquotes des nombres dépendent de la methode dont Monsieur Despagnet ne vous a peu faire voir qu'un seul cas, parce que depuis que je n'ay eu l'honneur de le voir je l'ay beaucoup étendue & changée. Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposeray de trouver une tangente à un point donné en la seconde Conchoïde de Nicomedes.

Au reste je suis bien aisé que vous ayez trouvé la demonstration, comme vous dites, de ce que supposé qu'aux paraboles les segmens de l'axe sont entre eux comme les parallelogrammes aux memes paraboles, il sera vray aussi qu'estans tournez sur leurs axes, les centres des solides seront où l'axe est divisé en raison comme les Cylindres aux solides; car par la voye dont j'ay envoyé un exemple à Monsieur de Beaugrand, & que je mettray au long une autre fois, j'ay trouvé la demonstration de l'antecedent & de celle du consequent que vous m'envoyerez, s'il vous plaît, j'en tireray la proportion des solides paraboliques à leurs cones, qu'il seroit mal-aisé de trouver autrement, car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent post quadrata alternatim, comme quarre-quarrez, cubocubes, &c. dequoy vous baillez l'exemple au premier, mais in parabolis cubicis, quadratocubicis & sic alternis in infinitum methodus qua usi sumus non dat proportionem conoidum ad conos, ex nostra autem methodo in omnibus omnino conoidibus invenimus centrum gravitatis, ergo ex tua propositione dabitur proportio eorum ad conos. Je l'attends donc avec impatience, puis qu'elle doit servir à cét usage, si ce n'est que vous ayez trouvé la proportion des conoides cubiques quadrato-cubiques, &c. à leur cones, ce que vôtre lettre semble marquer, auquel cas je vous supplie m'envoyer lesdites proportions.

Ce n'est pas que je doute de la verité de vôtre proposition, mais permettez-moy de vous dire que je me suis défié que vous en eussiez trouvé la demonstration & que j'ay crû seulement que vous en avez fait l'experience aux conoïdes paraboliques des quarrez, cubocubes, &c. alternis, mais la connoissance que j'ay de vôtre sçavoir fait que j'espere que vous me détromperez.

Pour ce qui est de la proportion du solide qui se fait sur un diametre de la parabole parallele à l'axe ma construction est differente de la vôtre. Il seroit inutile de l'ajouter, puis qu'elles concluent toutes deux.

Je me trouve obligé d'ajouter un mot touchant vôtre proposition mechanique parce que le Pere Merfenne m'écrit qu'enfin j'ay acquiescé à vôtre opinion, ce que pourtant je ne sçauois faire par les raisons que vous allez voir, & vous puis assûrer que jamais je ne fus mieux confirmé en la proposition de mon second levier que je le suis maintenant, car pour celle du premier il la faut établir par de nouveaux principes, puis que vous avez nié ceux que j'estimois si clairs.

Si vôtre principe duquel je vous ay déjà écrit par ma dernière lettre est vray, il s'en suit manifestement qu'un même corps approchant du centre de la terre changera son poids. In secunda figura sit vectis CAB , cujus medium A , cum centro terræ N , per rectam AN ad vectem perpendicularem jungatur, in punctis C & B , pondera C & B , æqualia constituentur, & similia quæ ad centrum per rectas CN , BN annuant. Si rectæ NC , NB , essent ad vectem perpendiculares potentia in A æqualis duobus ponderibus B & C ex tuo principio detineret vectem. Sed cum angulos NCA , NBA acutos efficiant, aut eadem, aut minor, aut major potentia requiretur in A ad æquilibrium. Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in precedenti ad te epistola usi sumus (quod si fatearis, statim vectem nostrum demonstrabimus.) Si major, aut minor potentia æquilibrium constituit, ergo in 1. casu quò minuentur magis anguli rectarum CN , BN cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in 2. casu minor. Supra punctum A idem vectis in eadem directionis linea similiter ponatur, ut in figura minuentur anguli linearum CN , BN , ut patet: variabit igitur potentia æquilibrij in A constituta, idèoque pondus ex gravibus B & C compositum pro diversa à terræ centro distantia erit etiam diversum.

Primam partem dilemmatis quo minus fatearis impedit tua propositio, quippe hoc dato; corrueret, fatearis igitur necesse est, aut potentiam in A variare pro diversitate angulorum, aut eandem semper esse in omni angulorum acutorum positione, sed tamen inæqualem potentia quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.

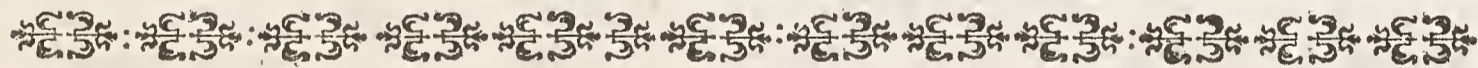
Utrumlibet concesseris, manifestissima demonstratione detegitur paralogismus, quem tuæ demonstrationi irrepsisse nec veritas quam quærimus patitur dissimulare, nec tu ipse poteris fortasse diffiteri.

In prima figura quæ est quarta tuæ propositionis, his verbis ita construis. Soit le centre de la balance A , le bras AB plus grand que le bras AC , & soient premierement les lignes de direction BD , CE , perpendiculaires aux bras AB , AC , par lesquelles lignes tirent les puissances, D , E , (lesquelles seront des poids si on veut) & qu'il y ait même raison de la puissance D à la puissance E , que du bras AC , au bras AB , les puissances tirans l'une contre l'autre, je dis qu'elles feront equilibrio sur la balance CAB . Car soit prolongé le bras CA jusques en F en sorte que AF soit égale à AB , & soit considerée CAF comme une balance droite, de laquelle le centre soit A , soient aussi imaginées deux puissances G , H , desquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction soient paralleles à la ligne CE , & que la puissance G soit égale à la puissance D , & la puissance H égale à la puissance E , l'une sçavoir G tirant sur le bras AF , & l'autre sçavoir H tirant sur le bras AC , lors par la premiere proposition, les puissances GH feront equilibrio sur la balance CAF . Mais par le premier principe la puissance D sur le bras AB , fait le même effet que la puissance G sur le bras AF , partant la puissance D sur le bras AB fait equilibrio

avec la puissance H sur le bras A C, & la puissance H tirant de même que la puissance E sur le bras A C, par le même premier principe, la puissance D sur le bras A B, fera équilibre avec la puissance E sur le bras A C. Hic vertitur cardo tuæ demonstrationis.

Et 1. si dixeris in omni angulorum acutorum positione eandem semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem; fatearis igitur necesse est variare potentiam prout anguli variant. His positis, esto si placeat in exposita figura centrum terræ N in quod rectæ C E, B D dirigantur, & sint in punctis E & D pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio (imò huc tantum abs te tenditur ut per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus ὁμολλήως moventes inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente, aliter quippe, cum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorsus essent) in punctis H & G construis potentias ponderibus E & D, æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus ὁμολλήως moveant, potentiam deinde H, potentiæ E æqualiter movere concludis per 1. tuorum axiomatum, quia nempe trahet H potentia per punctum C, & rectam H A, perpendicularem vecti, trahet etiam pondus E, per eandem rectam vecti perpendicularem, cum igitur æquales potentiæ per eandem rectam & eundem angulum moveant, & circa eandem à vectis centro distantiam, pondus E & imaginaria H, potentia æqualiter trahunt. Id verisimile cum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E sit Sphæricum, verbi gratia, omnes omnino ipsius partes ad centrum N tendunt per rectas in eadem N, centro concurrentes & vectem I C, si continentur ad angulos acutos stantes, ergo potentiæ abs C, utrinque æqualiter remotæ intelligentur, vectem ad angulos acutos suis motibus secantes; contra cum partes omnes potentiæ H ὁμολλήως moveant, intelligentur potentiæ abs C utrinque æqualiter remotæ ad angulos rectos vectem suis motibus secantes. Cum igitur partes omnes potentiæ H simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis E simul sumptis, tota enim potentia H toti ponderi E æquatur, patet ex jam traditis potentialium H, E, in punctis H & E inæqualem esse motum; quod igitur de potentia H concludit demonstratio, perperam ad pondus E porrigit.

S'il me restoit du temps ou du papier j'ajouterois suivant vôtre desir la demonstration des cones Isoperimetres, ce fera une autre fois, me reservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Mechaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer après une proposition, si je ne la croyois veritable, & que je la quitteray un moment après que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes. Je suis, &c.



A Monsieur de Roberval.

MONSIEUR,

Je trouve assés de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan, si à quocumque, &c. que je tiens une des plus belles propositions de la Geometrie, & je crois que vous serés de mon avis.

Sint data quotlibet puncta, s. verbi gratia, A, G, F, H, E, (nam propositio est generalis) quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo rectas à datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato. Jungantur puncta quævis A & E, per rectam A E, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares G, B, H, D, F, C, omnium rectarum, punctis datis vel occursum perpendicularem & puncto

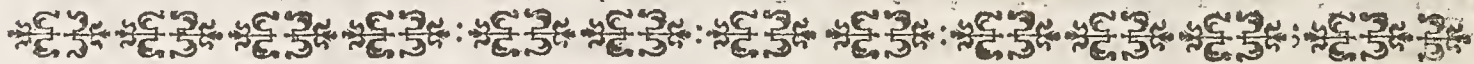
A terminatarum sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac species quintans ergo rectorum AB, AC, AD, AE , simul sumptarum esto AO , & à puncto O excitetur perpendicularis infinita ON , à quâ refecetur OI pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium GB, FC, HD , & intelligantur jungi rectæ AI, GI, FI, HI, EI , quadrata istarum δ , erunt minorâ spatio dato; demantur igitur à spatio dato & supersit, verbi gratia, Z planum cujus quintans, pars nempe conditionaria sumatur, & in quadratum redigatur, circulus centro I , intervallo M descriptus satisfaciet proposito, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia rectorum à datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.

Adderem demonstrationem, sed longa sanè est, & malim vestrum amborum sollicitare genium ad eam inveniendam: non solum autem has propositiones, sed omnes omnino de locis planis absolvi, imò locos quamplurimos adinveni de quibus nihil scripserat Apollonius, qui tamen sunt pulcherrimi, verbi gratiâ.

Datis tribus punctis in rectâ ABC , invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut N , quadrata AN, NB , superent quadratum NC spatio dato.

De locis solidis & ad superficiem multa quoque jam sunt detecta. Casus loci plani superioris non addo, nam patebunt statim. Si puncta data sint tantum tria, & constituent triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli, & hæc proportio singularis, satis est mira.

Sed hîc non moror. Propositionem universalissimam ita constituo, & jam construxi. Si à datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, & exponantur omnium species in datâ proportionem crescentes, aut deficientes erunt species ita auctæ aut deminutæ dato spatio æquales. Exemplum. Sint data tria puncta in superiori figurâ A, N, C , & quaerendus circulus in cujus circumferentiâ sumendo quodlibet punctum ut N quadrati NA dimidium, verbi gratiâ; quadrati BN duplum & quadrati CN triplum simul juncta conficiunt spatium datum & demonstratio ad quamlibet proportionem & quotlibet puncta porrigenda. Hanc propositionem, pulcherrimam sanè, videtur non vidisse Apollonius.



Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

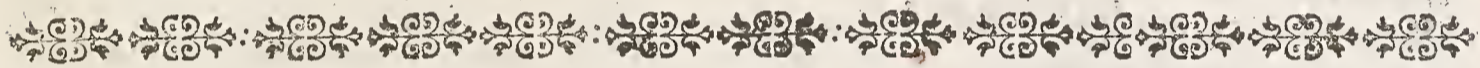
Du 4. Avril 1637.

MONSIEUR,

Quoy que j'eusse receu des Lundy dernier vôtre demonstration du lieu plan, neantmoins mes occupations tant publiques que particulieres ne me permirent point de la considerer jusques à Jedy que je la presentay de vôtre part à l'Assemblée de nos Mathematiciens qui étoit ce jour là chez Monsieur de Montholon Conseiller, où elle feut receüe, considerée, admirée avec étonnement des esprits, & vôtre nom élevé jusques au Ciel; avec charge particuliere à moy de vous remercier au nom de la Compagnie, & vous prier de m'envoyer tout d'une main la composition du lieu solide avec une briefve demonstration; afin de faire imprimer les deux ou sous vôtre nom, ou sans nom comme vous le voudrez: en quoy nous aurons le soin d'étendre plus au long ce qui semblera trop concis pour le public; cependant il y eût debat à qui auroit vôtre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bon-heur de la communication que j'ay avec vous: mais Monsieur le President Paschal à qui le premier je l'avois mis entre les

mains.

maines, & qui l'avoit leu à la Compagnie, donna arrest en sa faveur, se fondant sur la maxime (qui tenet, teneat) & pour faire droit aux parties interessées, se chargea luy même de leur en fournir copie, ordonnant que puis après l'original me seroit remis entre les mains. Je leur avois dès auparavant communiqué la construction, & un nommé Monsieur le Pailleur avoit trouvé la demonstration particuliere pour trois & pour quatre points, si differente de la vôtre, que c'est une chose étrange; il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une demonstration generale. Mais il confesse que cette recherche le tuoit, & qu'il vous a une particuliere obligation, de l'avoir delivré d'une peine presque insupportable; pour moy je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passez, pour être delivré de mes leçons publiques, & quand j'aurois ce loisir je ne serois pas assuré de trouver le lieu solide, lequel je prevoy tres-difficile, c'est pourquoy dès maintenant je vous feray si vous voulés une ample declaration de mon impuissance, afin que sans me tenter plus long-temps, & qu'ayant égard aux prieres d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez part de vôtre invention, qui est telle que le grand Geometre des siecles passez se glorifioit particulièrement d'y avoir adjouté la perfection, en ayant receu l'invention de ceux qui l'avoient precedé; jugés combien vous avés occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en même état que si elle n'avoit jamais été connue. Il m'est enfin parû quelque lumiere pour le centre de gravité des paraboles en considerant les centres des parallelogrammes circonscrits, comme s'ils étoient tous posés sur une même baze differens seulement en hauteur; mais comme ces lumieres me viennent au matin en me levant, & qu'il faut du loisir pour les éclaircir je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt, si vous me delivrés de cette peine, je vous en auray l'obligation entiere. Je suis, &c.



Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

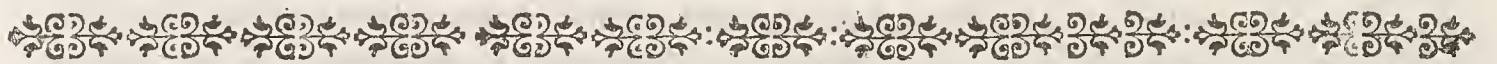
Du 20. Avril 1637.

MONSIEUR,

Je ne puis pas vous écrire par le dernier Courrier, à cause des occupations auxquelles je me trouvoy engagé, je prens maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs, à qui vous avés fait voir ma proposition, auxquels vous assurerés, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon Ouvrage. Leur sçavoir est si connu, que je ne puis m'empêcher d'être glorieux d'avoir écrit & inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne pretends pas par là vous exclurre du nombre, au contraire les marques de vôtre sçavoir m'étant plus particulièrement connues, je juge par là quels doivent être ceux qui conferent avec vous.

Au reste je vous eusse envoyé les lieux solides, ad 3. & 4. lineas, n'étoit que j'ay creu que Monsieur de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à Monsieur de Carcavi le lieu ad 3. lineas, que je luy envoyay il y a long-temps avec la demonstration, dès que vous aurez celui-là je vous enverray l'autre. Si j'avois retenu copie de celui ad 3. lineas je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer. Mais ne l'ayant plus, j'ay voulu ménager la peine qu'il m'eût falu prendre à le refaire, à laquelle je me porteray pourtant, si Monsieur de Beaugrand ne le baille pas. Vous verrez entre les mains de Monsieur Carcavi les deux livres, de locis planis, que j'avois promis depuis long-temps à Monsieur Beaugrand, & que j'ay à dessein envoyé un Courrier plutôt que je ne luy avois fait esperer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec

franchisé vôtre sentiment. Je ne doûte pas que la chose n'eût peu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes; je feray bien aisé que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connües, & quelles non, & en cas que vous en ayez veu quelqu'une, principalement du 2. Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxième Livre est écrit & en ce temps j'en baillay deux copies, l'une à Monsieur Despagne Conseiller au Parlement de Bourdeaux, & l'autre à Monsieur de, si bien que peut-être quelqu'une de ces propositions aura esté divulguée, peut-être vous même, ou quelqu'autre de ceux de vôtre Compagnie en ont fait une partie. Eclaircissez moy de tout au vray, & vous m'obligerez beaucoup, & sur tout que vôtre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plaît, je l'attends pour réponse à celle-cy; au reste quoy qu'on juge digne d'impression de moy, je ne veux pas que mon nom y paroisse, je me reserve à vous entretenir plus amplement une autrefois; cependant vous sçavez qu'outre les lieux plans & solides qui sont dans Pappus, j'en ay trouvé grande quantité de tres-beaux & dignes de remarque, que je n'ay pourtant osé mêler avec ceux d'Apollonius. J'en ay plus de cent propositions tres-belles, & particulièrement des lieux solides, & ad superficiem, mais le loisir me manque; je n'ay pas voulu faire le Grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus, il suffit que j'aye pris son sens, comme je croy que vous m'advoüerez. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.



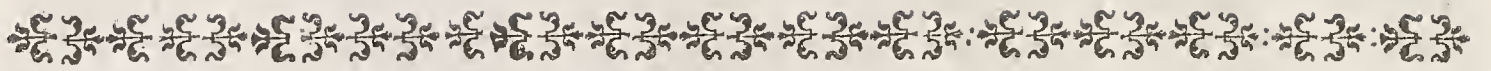
Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 1. Juin 1638.

MONSIEUR,

Puis qu'il est vray qu'il n'y a aucun contentement que je prefere à celui que je reçois de vos Lettres, vous devés penser que les occupations qui m'ont empêché de vous écrire depuis si long-temps, doivent avoir esté bien pressantes, ayans eü la force d'interrompre nôtre entretien qui m'est si cher & si agreable. Or pour recommencer, je vous diray que si j'ay entrepris la defense de vôtre traité (de Minimis & Maximis) contre les objections de M. Descartes, je m'y suis senty obligé, ou plutôt nécessité par mon genie, qui ne peut souffrir que la verité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entens pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoy j'ay grand besoin qu'au lieu de me remercier comme vous faites, vous m'excusiez, tant pour ce qu'étant foible j'ay osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pour ce que je l'ay fait sans vous en advertir, veu que vous sembliez y avoir le principal interest. Mais en effet c'est l'interest de la verité, & de tous ceux qui la cherissent; c'est pourquoy j'en ay fait le mien propre, & elle ma paru si claire qu'elle m'a fait passer par dessus les considerations de ma foiblesse, à laquelle j'ay pensé que son évidence pourroit suppléer assez suffisamment. J'espere que vous recevrez cette excuse & que vous me ferés l'honneur de croire que la connoissance que j'ay de vôtre merite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zele, quoy que mon insuffisance seule l'ait peu rendre en quelque sorte indiscret. Monsieur Descartes n'ayant pas encor receu mon écrit le 3. May, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de conséquence, vous les verrez dans sa Lettre que le Pere Mersenne vous pourra envoyer, il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toujours que c'est la plus grande, sinon qu'il y adjoûte qu'elle n'est la plus grande que sous certaines conditions; en quoy il s'enferme luy mé-

me, voulant refuter vôtre écrit qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionnellement. Il est vray que voulant la trouver absolument ou la moindre, & pour ce faire nommant le diametre ND, C, DE, B, & DC, ou EC, A, on tombe dans une absurdité que $C + B^2$ est égal à rien, & si le point E étoit dans le cercle $C - B^2$ seroit égal à rien. Mais cette absurdité monstre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonference autre part que dans la ligne DN, sçavoir au point N pour la plus grande, & au point D pour la moindre. En quoy il est remarquable que $C + B^2$ est la somme de la plus grande & de la moindre & $C - B^2$ est leur difference. Mandez moy quel est vôtre sentiment, car n'ayant pas encor le loisir de considerer bien particulièrement le fonds de vôtre methode & sa demonstration, il ne peut être qu'elle ne contienne des mysteres qui me sont encore cachez. J'ay trouvé admirable le moyen par lequel vous l'appliquez aux paraboles & solides paraboliques pour en trouver les centres, mais le voulant éprouver en la vraye parabole, j'ay trouvé qu'il falloit changer vôtre raisonnement qui n'est que particulier au Conoïde parabolique, car ayant l'espece de la ligne EO, vous pouvez bien dire comme la difference des quarez IA, & AN est au quarré de AN, ainsi la ligne EO est à OM, ce que vous ne prouvez pas en la parabole même, en laquelle suivant ce raisonnement il faudroit dire, comme la difference des cubes de IA & AN est au cube de AN, ainsi la difference des quarez de EM, & MO est au quarré de MO, & cependant vous n'avez pas l'espece ny de l'un ny de l'autre de ces quarez; au lieu desquels j'ay dit ainsi, il y a plus grande raison du cube IA au cube AN que du quarré EI au quarré OI, ce qui reüssit, & en la parabole cubique j'ay dit, il y a plus grande raison du quarré-quarré IA au qq. AN, que du cube EI au cube OI, &c. Mais le raisonnement est autant ou plus beau & plus facile par les figures qui restent ayant osté le plan parabolique du parallelogramme qui le comprend. J'ay promis à Mr. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne sçaurois assez admirer; & je m'assure que Mr. Paschal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la luy faire voir, comme j'espere & à Mr. des-Argues; il faut aussi que Mr. Descartes la voye, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes, & puis que vous avez trouvé par la même voye les tangentes de sa figure qui est une espece d'ovale, il sera bon que vous luy envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que par le même point donné il peut y passer deux de ces ovales, & partant y avoir deux tangentes, ce que j'espere que l'équation fera découvrir. J'y travaillerois, mais je suis assuré que vous y reüssirez mieux que moy: joint qu'il me faudroit être délivré de la roüe à laquelle je suis attaché, ayant appelé du nom de roüe le cercle qui roule, avec les conditions que vous sçavez, & ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonference pendant une revolution entiere, je demonstre que l'espace compris de cette ligne courbe, & de la droite qui luy sert de base sur laquelle la roüe se meut, est (majus datâ quàm in ratione) c'est à sçavoir que de cet espace en ayant osté l'espace de la roüe, il y aura même raison du reste à la même roüe, que de la base de l'espace à la moitié de la circonference de la roüe. D'où il s'ensuit qu'en la roüe ordinaire de laquelle la base est estimée égale à la circonference, l'espace dont il s'agit est triple de la roüe, & si la base est double de la circonference l'espace sera quintuple de la roüe: Si triple, septuple: & ainsi en continuant par les nombres impairs. De tout cecy, je vous enverray par le premier Courrier une brieve demonstration, en attendant le traité entier. Je suis, &c.



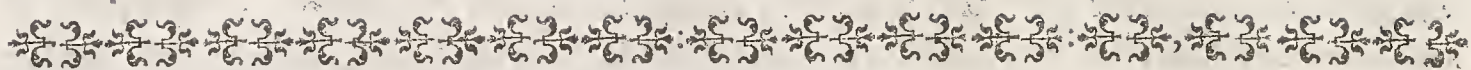
*Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de *****

MONSIEUR,

Puis que Monsieur de parle , & que vous l'ordonnés, vous, Monsieur, de qui la reputation est si grande & si bien établie, je laisse éveiller ma Geometrie , qui dormoit depuis long-temps dans un profond repos , & pour entrer d'abord en matiere , je veux bien vous conter l'intrigue de nôtre Dioptrique * & de nos refractions en forme d'Histoire , afin de vous laisser le jugement libre , & que vous puissiez prononcer sans preoccupation. Dès que j'eus veu le Livre de feu Monsieur Descartes , & que j'eus examiné avec quelque attention la proposition qui sert de fondement à sa Dioptrique , & qui établit la proportion des refractions, je soupçonnay sa preuve, sa demonstration me sembla un veritable paralogisme. 1. Parce qu'il la fonde sur une comparaison , & que vous sçavez que la Geometrie ne se picque guere de ces figures, les comparaisons y étant encore plus odieuses que dans le commerce du monde. Secondement parce qu'il suppose que le mouvement de la lumiere qui se fait dans l'air & dans les corps rares est plus malaisé , ou si vous l'aimez mieux ainsi plus lent que celui qui se fait dans l'eau , & les autres corps denses , ce qui semble choquer le sens commun , & enfin parce qu'il pretend que l'une des directions ou des determinations du mouvement d'une balle subsiste toute entiere après la rencontre du second milieu , j'adjoûtois même quelques autres raisons, qu'il seroit ou superflu, ou ennuyeux de vous déduire; il vît mes écrits, il y répondit, & après plusieurs réponses & repliques de part & d'autre nous nous séparames, comme le prevenu & le témoin, l'un dans l'affirmative, l'autre dans la negative, quoy que j'eus enfin des Lettres de sa part pleines de civilité. Depuis sa mort Mr. de la Chambre ayant publié son traité de la lumiere , & m'ayant fait l'honneur de me l'envoyer , je pris occasion de luy écrire la Lettre que vous avés veüe , dans laquelle je luy témoignay que pour nous guarentir des paralogismes en une matiere si obscure , je ne voyois point de moyen plus assuré que de chercher les refractions dans cét unique principe que la nature agit toujourns par les voyes les plus courtes , sur le fondement duquel je luy indiquay qu'on pouvoit chercher par Geometrie le point de refraction en le reduisant au probleme ou theoreme que vous sçavez ; mais parce que j'en jugeay l'invention tres-difficile & tres-embarrassée , puis que ces questions de maximis & minimis, conduisent d'ordinaire à des operations de longue haleine, & qui se broüillent aisement par une infinité d'asymmetries qu'on trouve sur son chemin, je laissay là ma pensée pendant plusieurs années en attendant que quelque Geometre moins paresseux que moy en fit ou la découverte ou la demonstration. Personne ne voulut entreprendre ce travail ; cependant je recevois de Lettres de Monsieur de la Chambre de temps en temps , par lesquelles il me pressoit d'adjoûter la Geometrie à mon principe , & de faire la demonstration en forme du veritable fondement des refractions. Ce qui me rebutoit à l'avance étoit l'assurance que Mr. Petit & autres m'avoient donnée, que leurs experiences qu'ils avoient souvent reiterées pour mesurer les refractions , & dans l'eau , & dans le cristal , & dans le verre , & dans beaucoup d'autres liqueurs differentes , s'accordoient tres-precisement avec la proportion de Monsieur Descartes , de sorte qu'il me sembloit inutile d'en aller

* Ceux qui ont le troisième Tome des Lettres de M. Descartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Descartes , & divers écrits sur ce sujet depuis la page 167. jusques à la page 350.

chercher quelque autre par mon principe, puisque la nature elle même s'expliquoit si clairement en sa faveur. L'objection que vous me faites dans vôtre écrit ne me faisoit nulle peine, & j'y avois déjà répondu dans ma Lettre à Mr. de la Chambre par cette raison que tout ce qui appuye ou fait ferme sur quelque point d'une ligne courbe est censé faire ferme ou appuyer sur la ligne droite qui touche la courbe audit point, & ainsi quoy que la somme des deux lignes de reflection soit quelquefois la plus grande dans les miroirs concaves, sphériques ou autres, elle est toujours la plus petite de toutes celles qui peuvent tomber sur la ligne ou sur le plan qui touchent les miroirs au point de la reflection, & cela n'a pas besoin de plus grande preuve, Mr. Descartes le supposant ainsi aussi bien que moy; toute la difficulté se reduisoit donc à ce qu'il me paroïssoit que j'avois à combattre, non seulement les hommes, mais encore la nature. Neantmoins les dernieres instances de M. de la Chambre furent si pressantes que je resolus il y peut avoir environ deux ou trois ans de tenter le secours de mon analyse, m'imaginant qu'il y a une infinité de proportions différentes entre-elles, dont les sens ne sçau-roient veriffier la diversité, & qu'ainsi j'en trouverois peut-être quelque une qui approcheroit de celle de Monsieur Descartes, & qui pourtant ne seroit pas la même. Je fis mon analyse en forme par une methode qui m'est particuliere, & qu'Herigone à fait autre-fois imprimer dans son cours Mathematique, je surmontay toutes les asymmetries avec peine, & voilà que tout à coup à la fin de mon operation tout se débrouille, & il me vient une equation tres-simple qui me donne justement la même proportion de Monsieur Descartes; je creus sur l'heure avoir equivoqué, car je ne pouvois me figurer qu'on aboutit à une même conclusion par des routes tout à fait opposées, Mr. Descartes supposant pour un des moyens de sa demonstration que le mouvement de la lumiere trouve plus de resistance dans l'air que dans l'eau, & moy supposant tout le contraire, comme vous verrez dans la copie de ma demonstration que j'ay tâché de refaire de memoire pour vous satisfaire pleinement, mon original ayant esté envoyé à Monsieur de la Chambre suivant ma paresse ordinaire. Je refis donc pour lors la question à diverses reprises en changeant les positions, & je trouvay toujours la même conclusion, ce qui me confirma deux choses, l'une que l'opinion de Mr. Descartes sur la proportion des refractions est tres-veritable, & l'autre que sa demonstration est tres-fautive, & pleine de paralogismes. Messieurs les Cartesiens virent ensuite ma demonstration qui leur fut communiquée par Monsieur de la Chambre, ils s'opiniâtrèrent d'abord à la rejeter, & quoy que je leur representasse tout doucement qu'il leur devoit suffire que le champ de bataille demeurât à Mr. Descartes, puisque son opinion se trouvoit veritable & confirmée, quoy que par de raisons différentes des siennes, que les plus fameux Conquerans ne s'estimoient guere moins heureux lors que la victoire leur étoit procurée par les troupes auxiliaires, que si c'étoit par les leurs, ils ne voulurent point dans les premiers mouvemens entendre raillerie, ils vouloient que ma demonstration fût fautive, puis qu'elle ne pouvoit pas subsister sans destruire celle de Mr. Descartes qu'ils entendoient mettre toujours hors du pair; mais comme les plus habiles Geometres qui virent la mienne sembloient y donner leur approbation, ils me firent enfin compliment par une Lettre de Mr. Clairfellier, qui est celuy qui a procuré l'impression des Lettres de Monsieur Descartes, ils crierent au miracle dequoy une même verité s'étoit rencontrée au bout de deux chemins entierement opposez, & prononcerent qu'ils vouloient bien laisser la chose indecisè, & advoüer qu'ils ne sçavoient à qui donner la preferance de Mr. Descartes ou de moy sur ce sujet, & que la posterité en jugeroit. C'est à vous, Monsieur, qui estes sans doute destiné par vôtre merite extraordinaire à avoir grand commerce avec elle à l'informer, si vous le jugez à propos, de ce celebre demelé, ou si vous aymés mieux placer ce petit écrit parmi vos papiers inutiles, j'y consens, & tout m'est indifferent; mais il n'en est pas de même de la tres-humble priere que je vous fais de me croire, &c.

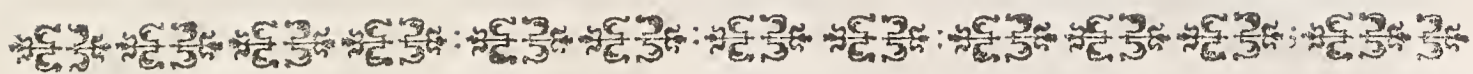


Demonstration dont il est parlé dans la Lettre precedente.

Soit la droite $A F M$, qui represente la separation de deux differens milieus, que l'air soit du costé de B , & l'eau du costé de H , le rayon de lumiere qui doit aller du point B qui est en l'air, vers le point F , ou commence le milieu de l'eau, se romp & va vers H , s'approchant de la perpendiculaire suivant les experiences connues & vulgaires. Monsieur Descartes determine ce point H , en telle sorte qu'en tirant une perpendiculaire du point B sur la ligne $A F M$, qui soit $B A$, il fait que la ligne $A F$ est à la ligne $F M$, comme la resistance d'un des milieus à celle de l'autre, bien qu'il entende contre mon sens, que la resistance est plus grande dans l'air qu'elle ne l'est dans l'eau. Soit donc la plus grande resistance representée par la ligne $A F$ & la moindre par celle de $F M$ & par consequent la ligne $A F$ plus grande que $F M$, soit élevée du point M la perpendiculaire $M H$ qui soit coupée en H par le cercle dont le centre est F , & le rayon $F B$, si bien que les droites $B F$, & $F H$ seront égales, je dis que le rayon $B I$ venant à se rompre par la rencontre de l'eau ira vers H ; car puisque par mon principe la nature agit toujours par les voyes les plus courtes, si je prouve qu'en passant par les deux droites $B F$, & $F H$ elle y employe moins de temps qu'en passant par aucun autre point de la droite $A M$, j'auray prouvé la verité de la proposition; or puis que je presuppose que le mouvement dans l'air est plus aisé, & par consequent plus vite, le mouvement de B en F se fera en moins de temps que celui de F à H , & pour regler la veritable proportion, il faut faire comme $A F$ à $F M$, qui sont les mesures des resistances, ainsi $B F$ à $F D$, & les deux droites $D F$ & $F H$ seront les mesures du temps qui sera employé de B à F & de F à H , sçavoir la droite $D F$, sera la mesure du mouvement par $B F$ qui est plus vite, & la droite $F H$ sera la mesure du mouvement par $F H$ qui est plus lent, & ce suivant la proportion de $B F$ à $F D$, ou de $H F$ qui est égale à $B F$ à la même $F D$; si je prouve donc que quelque point que vous preniez des deux costez $D F$, la somme des deux droites $D F$, $F H$ est toujours plus petite que deux droites prises au même sens, j'auray ce que je cherchois; soit donc premierement du costé vers M le point O en joignant les droites $B O$, & $O H$, & faisant comme $B F$ à $D F$ ainsi $B O$ à $C O$, je dois prouver que la somme des deux droites $C O$ & $O H$ est plus grande que celle de $D F$ & $F H$, & en prenant de même quelqu'autre point comme V de l'autre côté vers A , je dois aussi prouver qu'en joignant les deux droites $B V$, & $V H$, & faisant comme $B F$ à $D F$, ainsi $B V$ à $Y V$ la somme des deux droites $Y V$, & $V H$ est plus grande que celle des deux droites $D F$ & $F H$; pour y parvenir je fais comme $B F$ à $A F$, ainsi $F O$ à $F R$, & comme la même $B F$ à $F M$ ainsi $F O$ à $F I$, puisque $B F$ est plus grande que $A F$, donc $F O$ est plus grande que $F R$, & puisque $A F$ est plus grande que $F M$, $F R$ est aussi plus grande que $F I$, & il paroît même que $F R$ est à $F I$ comme $A F$ à $F M$, car puisque par la construction comme $A F$ est à $F B$ ainsi $F R$ à $F O$, & comme $F B$ à $F M$ ainsi $F O$ à $F I$, donc, ex æquo, comme $A F$ à $F M$, ainsi $F R$ est à $F I$, je dis donc que les deux droites $C O$ & $O H$ sont plus grandes que les deux droites $D F$ & $F H$, car par Euclide au triangle amblygone $F H O$ la somme des deux quarez $H F$ & $F O$ est égale à la somme du quarré $H O$ & du rectangle $M F O$ pris deux fois, or puisque nous avons fait comme $B F$ ou $F H$ à $F M$ ainsi $F O$ à $F I$, donc le rectangle sous les extremes $H F I$ est égal au rectangle sous les moyennes $M F O$, & le rectangle $H F I$ pris deux fois est égal au rectangle $M F O$ pris deux fois; nous avons donc la somme des deux quarez $H F$ & $F O$ égale à la somme du quarré $H O$ & du rectangle $H F I$ pris deux fois, mais le rectangle $H F I$ pris deux fois est égal au rectangle $H I F$ pris deux fois, & au double quarré de $I F$ & le quarré $H F$ par le même Euclide est égal au rectangle $H I F$ pris deux fois, &

aux deux quarez HI & IF , nous avons donc d'un côté le quarré HI , le quarré IF , le rectangle $HI F$ deux fois pris, & le quarré FO égaux au quarré HO au rectangle $HI F$ deux fois pris & au quarré FI pris deux fois, ôtez de part & d'autre le rectangle $HI F$ deux fois & le quarré FI , reste d'un côté le quarré HI avec le quarré FO égaux audit quarré HO & IF , mais le quarré FO est plus grand que le quarré FI , puis que par la construction FO est plus grande que FI , donc le quarré HO est plus grand que le quarré HI , & partant la droite HO est plus grande que la droite HI ; si je prouve en suite que la droite CO est plus grande que les deux droites DF & FI , il restera prouvé que les deux CO & OH sont plus grandes que les trois DF , FI , & IH , ou que les deux DF & FH ; je prouve donc le requis dans le triangle amblygone BFO par Euclide le quarré BO est égal à la somme des quarez BF & FO & au double rectangle AFO , mais puisque nous avons fait par la construction comme BF à FA ainsi FO à FR , donc le rectangle sous BF & FR est égal au rectangle AFO , & par conséquent le quarré BO est égal aux quarez BF & FO & au rectangle sous BF , FR deux fois pris, mais le quarré FO est plus grand que celui de FR , puisque la ligne FO a été prouvée plus grande que la ligne FR , donc si vous substituez le quarré de FR au lieu de celui de FO , le quarré BO sera plus grand que les deux quarez BF , FR , & le rectangle $BF R$ deux fois pris, mais ces dernières sommes sont égales par Euclide au quarré des deux droites BF & FR prises comme une seule, donc la droite BO est plus grande que la somme des deux droites BF & FR : mais nous avons prouvé que RF est à IF comme AF à FM , c'est à dire comme BF à FD qui est la mesure de la diversité des mouvemens, donc comme la somme des deux antecedens BF & FR est à la somme des deux consequens DF & FI , ainsi BF à FD , or BO est à OC , comme BF à FD , donc comme BO est à OC , ainsi la somme des deux droites BF & FR est à la somme des deux droites DF & FI , mais nous avons prouvé que la droite BO est plus grande que la somme des deux droites BF & FR , il est donc vray que la droite CO est plus grande que la somme des deux droites DF & FI , ce qu'il falloit prouver en second lieu; il n'y a donc aucun point du côté de M par où le rayon puisse passer sans y employer plus de temps que par le point F . Il reste à prouver la même chose au point V ; soit fait comme cy-dessus, comme BF à FA , ainsi FV à FN , & comme la même BF à FM , ainsi FN à FX , NF sera à XF comme AF à FM , c'est à dire comme BF à FD par la preuve precedente, & chacune de ces deux droites NF & XF sera plus petite que VF , par ce qui a precedé; il faut prouver que la somme des deux droites YV & VH est plus grande que la somme des deux droites DF & FH . Je considere premierement que par Euclide dans le triangle amblygone VFH la somme des quarez HF & FV , & du rectangle MFV pris deux fois est égale au quarré VH , mais puis que par la construction il a été fait comme BF à FM ainsi FV à FX , donc le rectangle $BF X$ ou le rectangle $HF X$ (puisque BF & FH sont égales) est égal au rectangle MFV : nous avons donc d'un costé la somme des quarez HF & FV & du rectangle $HF X$ pris deux fois égale au quarré HV , mais le quarré FX est moindre que le quarré FV , donc la somme des quarez HF , FX & du rectangle $HF X$ pris deux fois est moindre que le quarré HV . Or cette somme est égale au quarré fait des deux droites HF & FX , comme d'une seule par Euclide, donc la somme des deux droites HF & FX est moindre que HV & HV est plus grande que ces deux droites HF & FX ; si je prouve donc que la droite YV est plus grande que la droite DX il restera prouvé que la somme des deux YV & HV est plus grande que la somme des trois DX , XF , FH , c'est à dire que des deux DF , FH , pour faire cette dernière preuve, je considere le triangle amblygone BVF auquel par Euclide les deux quarez BF & FV sont égaux au quarré BV , & au rectangle AFV pris deux fois; or puisque par la construction nous avons fait comme BF à FA , ainsi VF à FN , donc le rectangle $BF N$ est égal au rectangle AFV , & partant la somme des deux quarez BF & FV est égale à la somme du quarré BV , & du rectangle $BF N$ pris deux fois; or le rectangle $BF N$ pris deux fois est égal

au rectangle BNF pris deux fois, & à deux fois le carré FN , donc la somme des deux quarrés BF & FV est égale à la somme du carré BV , du rectangle BNX pris deux fois, & du carré de FN pris deux fois; or le carré BF est par Euclide égal au carré BN , au carré NF , & au rectangle BNF pris deux fois, nous avons donc la somme des quarrés BN , NF , FV , & du rectangle BNF pris deux fois égale à la somme du carré BV du rectangle BNF pris deux fois, & du carré de FN pris deux fois: ôtez de chaque côté le rectangle BNF pris deux fois, & le carré NF , il restera donc que le carré de BN , & le carré FN seront égaux aux quarrés BV & FN , or le carré FV est plus grand que le carré de FV par la construction, donc le carré BV est plus grand que celui de BN , & partant la droite BV est plus grande que la droite BN , mais nous avons prouvé que comme la droite BF est à FD , ainsi NF est à FX , donc comme la droite BF est à FN , ainsi sera DF à FX , & par la conversion des raisons, comme BF à BN , ainsi sera DF à DX , & comme BF à DF , ainsi BN à DX , mais nous avons fait comme BF à DF , ainsi BV à YV , donc comme BV à YV , ainsi sera BN à DX , mais nous avons prouvé que BV est plus grande que BN , donc YV le fera plus que DX . Or il a esté déjà prouvé que VH est plus grande que les deux droites HF & FX , donc il est pleinement prouvé que les deux droites YV & VH sont plus grandes que les trois DX , XF , & FH , ou que les deux DF & FH , & ainsi la demonstration est complete. Il suit de là qu'en posant mon principe, que la nature agit toujours par les voyes les plus courtes, la supposition de Monsieur Descartes est fausse lors qu'il dit que le mouvement de la lumiere se fait plus aisement dans l'eau, & les autres corps denses que dans l'air, & les autres corps rares, car si cette supposition de M. Descartes étoit vraie, & que vous imaginiez qu'en ma figure l'air est du côté de H , & l'eau du côté de B , il s'ensuivroit en transposant la demonstration que le rayon qui partiroit du point H , & rencontreroit l'eau au point F se romproit vers B , parce que le mouvement par l'air étant plus lent selon la supposition de Monsieur Descartes, il seroit mesuré par la droite HF , & celui qui se fait dans l'eau seroit mesuré par la droite FD , comme étant plus vite, de sorte que les deux droites HF , FD , étant les plus petites, la refraction se feroit vers B , c'est à dire que le rayon s'écarteroit de la perpendiculaire, ce qui est absurde & contre l'experience; si la situation des deux points B & H change dans les deux lignes BF & FH prolongées de part & d'autre autant que vous voudrez, la demonstration aura lieu, & vous le verrez de vous même. Je n'ajoute point l'analyse, car outre qu'elle est longue & embarrassée, il vous doit suffire que le retour que vous venez de lire est court & purement Geometrique; il suit de tout cela, que lors que les deux points B & F sont donnez, ou bien H & F , on peut trouver aisement le probleme par les plans, mais lors qu'on donne deux points C , O , B , & H , & qu'on veut chercher par eux le point de refraction dans la ligne ou plan qui separe les deux milieus, en ce cas le probleme est solide, & ne se peut construire qu'en y employant des paraboles, des hyperboles, ou des ellipses, mais comme cette invention n'est guere mal-aisée à un Geometre mediocre en demeurant d'accord du fondement, & de la proportion sur laquelle il doit travailler, & que je vous ay déjà expliquée, je n'ay garde de douter que vous ne la trouviez d'abord, vous, Monsieur, qui estes si fort au dessus du commun; outre que ne s'agissant proprement dans la question que vous me faites, que d'apprendre quelles sont les voyes de la nature, j'y ay déjà satisfait, & que cette grande ouvriere n'a pas besoin de nos instrumens & de nos machines pour faire ses operations.



*Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Roberval
à Paris.*

MONSIEUR,

Après vous avoir remercié de vos civilités, & protesté que je seray ravi d'avoir des occasions à vous plaire, je vous supplieray de me faire part de vôtre invention sur le sujet des tangentes des lignes courbes, & encore de vos speculations mechaniques sur la percussion, puisque vous me faites esperer la communication de vos pensées en cette matiere. Après cela je vous diray que Mr. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les mysteres des nombres, en quoy il me semble qu'il est extremement versé; je luy ay envoyé les belles propositions sur les progressions Geometriques, qui commencent à l'unité, lesquelles j'ay non seulement trouvées, mais encore démontrées, bien que la demonstration en soit assez cachée, ce que je vous prie d'essayer, puisque vous les avez veües; mais voicy ce que j'ay découvert depuis sur le sujet de la proposition 12. du 5. Livre de Diophante, en quoy j'ay suppléé, ce que Bachet avoüe n'avoir pas sceu & rétably en même temps la corruption du texte de Diophante, ce qui seroit trop long à vous deduire: il suffit que vous voyez ma proposition, & que je vous fasse plutôt souvenir que j'ay autrefois démontré qu'un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ny quarré ny composé de deux quarrés, ny en entiers, ny en fractions. J'en demeuray là pour lors, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne sont ny quarrés ny composés de deux quarrés, comme 21, 33, 77, &c. ce qui a fait dire à Bachet sur la division proposée de 21. en deux quarrés, quod quidem impossibile est, ut reor, cum is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis, où le mot de, reor, marque évidemment qu'il n'a point sceu la demonstration de cette impossibilité, laquelle j'ay enfin trouvée & comprise generalement dans la proposition suivante.

Si un nombre donné est divisé par le plus grand quarré qui le mesure, & que le quotient se trouve mesuré par un nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; le nombre donné n'est ny quarré, ny composé de deux quarrés, ny en entiers, ny en fractions. Exemple, soit donné 84. le plus grand quarré qui le mesure est 4. le quotient 21. lequel est mesuré par trois, ou bien par 7. moindres de l'unité qu'un multiple de 4. je dis que 84. n'est ny quarré ny composé de deux quarrés, ny en entiers ny en fractions.

Soit donné 77. le plus grand quarré qui le mesure est l'unité, le quotient 77. qui est icy le même que le nombre donné se trouve mesuré par 11. ou par 7. moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire; je dis que 77. n'est ny quarré ny composé de deux quarrés ny en entiers ny en fractions, &c.

Je vous avoüe franchement que je n'ay rien trouvé en nombres qui m'aye tant plû que la demonstration de cette proposition, & je seray bien-aise que vous fassiez effort de la trouver, quand ce ne seroit que pour apprendre si j'estime plus mon invention qu'elle ne vaut. J'ay démontré en suite cette proposition qui sert à l'invention des nombres premiers.

Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entr'eux, je dis qu'il ne peut estre divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

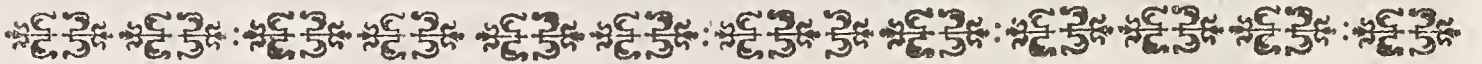
Comme par exemple adjoutez l'unité, si vous voulez, à un quarré pair, soit le quarré

1000000000. lequel avec un, fait 10000000001. Je dis que 10000000001, ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4. Et ainsi lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ny par trois, ny par 7. ny par 11. &c.

Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Geometrie, voicy ce qu'on ma proposé, & que j'ay trouvé tout aussi-tôt.

Per datum extra vel intra parabolam punctum rectam ducere quæ abscindat segmentum à parabolâ æquale dato spatium. Et si punctum sit intra parabolam, determinare minimum quod à parabola per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction je vous feray part de la mienne. J'attens de vos nouvelles, & suis, &c.



*A Monsieur de *****

Du 18 Octobre 1640.

MONSIEUR,

Les vacations qui m'ont éloigné de Tolose m'ont en même temps éloigné de mon devoir, & empêché de vous écrire plutôt depuis la dernière de vos lettres en datte du 21. Septembre. Je tâcheray de reparer par celle-cy la longueur de l'attente, & commenceray par la liberté que je prens de vous dire que je n'ay point veu encore aucune proposition de vôtre part, que je n'eusse plutôt trouvée & considérée, & afin de vous rendre vous même juge de cette verité, & vous ôter en même temps le scrupule que vous pourriez avoir que je n'en uze comme quelqu'un de ceux du lieu où vous estes qui s'attribue impunement les inventions d'autrui, apres qu'elles luy ont esté communiquées; je commenceray par la proposition de la difference de deux quarez que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante au Commentaire de la proposition 11. du 3. Livre en même façon que vous me l'avez envoyée, vous advoüant pourtant que l'application que j'estime beaucoup est toute vôtre, & que je l'ay apprise de vous. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par advance les propositions qui servent à determiner les parties des puissances — 1, & par ma seconde Lettre je vous avois fait comprendre que j'avois considéré toutes les propositions qui servent aux puissances plus un, dequoy je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit démontré par moy, & par conséquent connu necessairement, & l'autre ne m'étoit point entierement connu par raison demonstrative, bien que je vous assûrassé que je n'en doûtois pas: or pour venir à la connoissance de ce dernier quoy qu'imparfaite encore & non achevée, je ne le pouvois sans avoir plutôt examiné & prouvé par demonstrations toutes leurs propositions contenües en vôtre dernière, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyay le marquoit assez, auquel j'adjoûtois qu'en toutes progressions on pouvoit determiner les diviseurs communs & generaux avec pareille aisance; Mais je vous advoüe tout net (car par advance je vous advertis que comme ie ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne sçay, je dis avec même franchise ce que je ne sçay pas) que je n'ay peu encore démonstrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée, & que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257. 6553. &c. Car bien que je reduise l'exclusion à la plus part des nombres, & que j'aye même des raisons probables pour le reste, je n'ay peu encore démonstrer necessairement la verité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doûte non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve assurée vous

m'obligerez de me la communiquer ; car apres cela rien ne m'arrestera en ces matieres.

Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes , laquelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la premiere Lettre que je vous écrivis, laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant si le Pere Merfenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le Bureau de la Poste elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à Monsieur Outre que cette proposition est si naturelle qu'il est impossible de determiner & de trouver la moindre chose sur ce sujet qu'elle ne se presente d'abord. De sorte qu'ayant depuis fort long-temps trouvé & envoyé les propositions des deux nombres 17296. & 18416. & autres pareilles, il falloit par necessité que j'eusse passé par ladite proposition. Pour vôtre application, il me semble qu'elle n'oste pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ay toujours reconnue : sinon que je ne l'aye pas bien comprise, dequoy je vous prie m'avertir & me rendre certain. Il me semble apres cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuye les demonstrations de tout ce qui concerne les propositions Geometriques qui est tel.

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances -1 . de quelque progression que ce soit, & l'exposant de ladite puissance est sous-multiple du nombre premier donné -1 . Et après qu'on a trouvé la premiere puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposans sont multiples de l'exposant de la premiere satisfont de même à la question.

Exemple, soit la progression donnée,

1 2 3 4 5 6

3 927 81 243 729, &c.

Avec les exposans au dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. il mesure la troisième puissance -1 , de laquelle 3. exposant est sous-multiple de 12. qui est moindre de l'unité que le nombre de 13. Et parce que l'exposant de 729. qui est 6. est multiple du premier exposant 3. il s'ensuit que 13. mesure aussi ladite puissance de 729 -1 . Et cette proposition est generalement vraie en toutes progressions & en tous nombres premiers. Dequoy je vous enverrois la demonstration, si je n'apprehendois d'être trop long. Mais il n'est pas vrai que tout nombre premier mesure une puissance $+1$ en toute sorte de progressions. Car si la premiere puissance -1 qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance $+1$ dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier.

Exemple, parce qu'en la progression double 23. mesure la puissance -1 qui a pour exposant 11, ledit nombre 23. ne mesurera aucune puissance $+1$ de ladite progression à l'infini.

Que si la premiere puissance -1 qui est mesurée par le nombre premier donné a pour exposant un nombre pair : en ce cas la puissance $+1$ qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers, qui ne mesurent aucune puissance $+1$ en une progression donnée. Car cela sert, par exemple, à trouver que les deux nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits, & a mille autres choses, comme par exemple, d'où vient que la 37. puissance -1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot il faut determiner quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur premiere puissance -1 & en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort mal-aisé, en attendant un plus grand éclaircissement de vôtre part, & qu'il vous plaise deffendre cet endroit de vôtre Lettre, où vous dites qu'après avoir trouvé que le diviseur doit être multiple $+1$ de l'exposant, il y a aussi des regles pour trouver le quantième desdits multiples $+1$ de l'exposant doit être le diviseur. Voicy une de mes propositions que peut-être vous aurez aussi trouvée que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que

sans doute j'acheveray d'apprendre de vous.

En la progression double, si d'un nombre quarré, généralement parlant, vous, ôtez 2. ou 8. ou 32. &c. les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste feront l'effet requis comme de 25. qui est un quarré, ôtez 2. le reste 23. mesurera la 11. puissance — 1, ôtez 2. de 49. le reste 47. mesurera la 23. puissance — 1.

Ôtez 2. de 225. le reste 223. mesurera la 37. puissance — 1 &c.

En la progression triple, si d'un nombre quarré, ut supra, vous ôtez 3. ou 27. ou 243. &c.

Les nombres premiers & moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste feront l'effet requis, comme,

Ôtez 3. de 25. le reste 22. est mesuré par 11. qui est premier & moindre de l'unité qu'un multiple de 4. aussi 11. mesure la 5. puissance — 1.

Ôtez 3. de 121. le reste 118. est mesuré par 59. moindre de l'unité, &c. aussi 59. mesure la 29. puissance — 1.

En la progression quadruple il faut ôter 4. ou 64. &c. à l'infini en toutes progressions en procedant de même façon.

J'ajouërteray encore cette petite proposition.

Si d'un quarré vous ôtez 2. le reste ne peut être divisé par aucun nombre premier, qui surpasse un quarré de 2. comme prennés pour quarré 100000. duquel ôté 2. reste 99998. je dis que ledit reste ne peut être divisé ny par 11. ny par 83. ny par 167. &c. vous pouvez éprouver la même regle aux quarrés impairs, & si je voulois je vous la rendrois belle & generale, mais je me contente de vous l'avoir indiquée seulement.

Avant que finir, voicy une autre proposition, laquelle vous fournira peut-être quelque application, comme vous y êtes tres-heureux.

Si un nombre est mesuré par un autre, & que le nombre divisé soit encore divisé par un autre nombre moindre que le premier diviseur: en ce cas, si vous ôtez du quotient de la seconde division multiplié par la difference des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur.

Exemple, 121. est mesuré par 11.

Divisez encore 121. par 7. le quotient fera 17. & le reste de ladite division 2.

Multipliez le quotient 17. par 4. difference du premier & second diviseur & du produit 68.

Ôtez en 2. le reste 66. sera aussi mesuré par 11. premier diviseur.

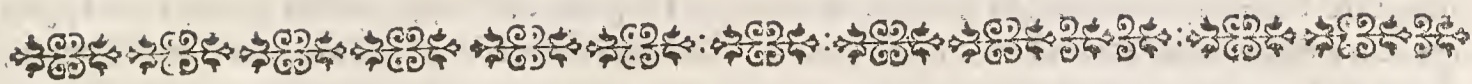
Que si le second diviseur est plus grand que le premier; en ce cas si vous adjouëtez au quotient de la seconde division multiplié par la difference des deux diviseurs le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur.

Exemple, 117. est mesuré par 3.

Divisez encore 117. par 4. le quotient fera 29. & le reste de ladite division 1.

Adjouëtez au quotient 29. multiplié par la difference des divisions qui ne changé icy rien, parce que c'est l'unité, le reste de ladite division qui est 1. la somme 30. sera aussi mesurée par 3. premier diviseur.

J'ay déjà trop écrit, & il me semble qu'il est temps que vous parliez après avoir employé si mal vôtre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je suis, &c.



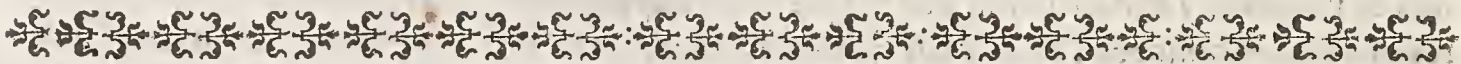
Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 4. Aoust 1640.

MONSIEUR,

Encore que depuis près de trois ans je n'aye eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ay pourtant pas esté privé entierement du plaisir que je reçois de vos speculations Mathematiques. Car le Pere Merfenne m'a fait la faveur de me communiquer la plus grande partie des Lettres qu'il a receües de vous depuis ce temps là, dans lesquelles, j'ay reconnu une augmentation continuelle, & tres-sensible en la beauté & solidité de vos pensées, auxquelles il n'y a rien que d'admirable, soit sur le sujet de la Geometrie ou de l'Arithmetique: sur tout je suis ravi de vôtre invention (de minimis & maximis) & du moyen par lequel vous l'appliquerez à la recherche des touchantes des lignes courbes, & ne croy pas que jusques icy il se soit veu rien sur ce sujet, qui ne cedat de beaucoup à ce que vous nous en avez donné: car l'invention de Mr. Descartes, à laquelle j'assigne le premier lieu apres la vôtre, n'en aproche que de bien loin, parce que quoy qu'elle puisse être rendüe universelle, ce qu'il n'a pas fait & le pourra maintenant à l'imitation de vôtre derniere addition, toutesfois elle est sans comparaison plus longue, plus embarrassée & plus difficile. Je vous diray que j'ay d'autant plus admiré vôtre invention, qu'à peine croyois-je que pour trouver les touchantes des lignes courbes, qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes, ou partie à des droites, & partie à des courbes, on peut s'en servir, ce que Monsieur Descartes advoüe de la sienne sur le sujet de la roulette & autres lignes pareilles, lesquelles pour cette consideration il rejette de la Geometrie, sans raison, puis qu'à l'imitation de vôtre derniere addition, sa methode peut être rendüe universelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien souvent ne se pourroit presque surmonter par un esprit humain. Cette opinion fut cause que quand je vis que vous aviez trouvé les touchantes de la roulette, & que vous assurieiez avoir la regle universelle pour toutes les lignes courbes, je creus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps même que j'inventay cette roulette, laquelle regle ou methode je n'avois encore communiqué à personne, m'étant contenté d'en avoir démontré les effets à Monsieur Paschial en la tangente de la quadratrice qui se trouvoit des plus difficiles, y joignant la demonstration Geometrique comme a fait Archimede en celle de la spirale, laquelle par ma methode s'expedie en deux mots. J'avois fait la même chose en la Cissoïde, & avois démontré de plus que ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature, & ont des asymptotes paralleles entr'elles, ce qu'on m'a assuré avoir esté déjà démontré par un Auteur dont on ne m'a peu dire le nom. J'ay aussi démontré les tangentes des lignes courbes qui se décrivent avec un compas sur la superficie d'un Cylindre, puis se reduisent en plan, & en general celles de toutes les lignes courbes qui ont peu venir à ma connoissance, & cette methode est tellement differente de la vôtre (contre ma premiere opinion) qu'elles ne se ressemblent en rien qu'en la conclusion. Depuis Monsieur Mydorges faisant quelques difficultez sur la vôtre, je luy en donnay la solution, & en même temps je luy ouvris les principes de la mienne, & luy en fis voir un essay en la Cissoïde: si je sçay que vous l'ayés agreable je vous en écriray. Elle n'est pas inventée avec une si subtile & si profonde Geometrie que la vôtre, ou celle de Monsieur Descartes, & partant elle paroit avec moins d'artifice; en recompense elle me semble plus simple, plus naturelle & plus courte, de sorte que pour toutes les touchantes dont j'ay parlé il ne m'a pas mé-

mes esté besoin de mettre la main à la plume. Depuis cette invention je me suis appliqué aux lieux solides (ad tres & ad quatuor lineas) lesquels j'ay entièrement restitués, quoy que pour n'y rien oublier, il ne faille gueres moins de discours qu'aux six premiers livres des elemens. C'est dequoy je vous entretiendray une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le meriter. En suite j'ay considéré la percussion, le mouvement, & les autres effets, que cause quelque impression soit violente ou naturelle, en quoy je ne croy pas avoir mal employé le temps, puis qu'en une matiere si épineuse, encore ay-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, & laquelle je pourray peut-être augmenter avec le temps. J'oublois presque à vous dite que les nombres dont vous avés déjà découvert des proprietés admirables, contiennent de grands mysteres, mais pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble d'accord & sans jalousie, & desquels le genie fut naturellement porté à cette speculation, ce qui est tres-difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ay parlé cy-dessus, je prendray aussi plaisir à le considerer plus particulièrement, esperant que vous me faires part de vos inventions, dequoy je vous supplie en qualité de, &c.



Lettre de Monsieur de Frenicle à Monsieur de Fermat.

Du 2. Aoust 1641.

MONSIEUR,

J'étois dans l'impatience de sçavoir vôtre retour à Tolose, pour me donner l'honneur & le contentement de continuer nos conférences, lorsque le R. P. Mersenne m'en a donné avis; j'espere qu'elles dureront plus long-temps que je ne pensois, parce qu'il est survenu quelque chose qui m'arrête icy. J'ay mille remerciemens à vous faire de la limitation des côtez que vous m'avez envoyée, laquelle veritablement je prisé fort, j'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationnelle, & pour cela je m'étois contenté des raisons de 10. à 24. & à 25. mais vous l'entendez icy à l'infy. J'avois crû par la lecture de vôtre precedente, par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous pretendissiez de donner une raison rationnelle pour cette limitation; c'est ce qui m'avoit fait dire, que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parceque je la sçavois être impossible. Je sçay que l'Algebre de ce pais-cy ce n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore icy trouvé la maniere de l'y appliquer; c'est ce qui me fait croire que vous vous estes fabriqué depuis peu quelque espece d'Analyse particuliere pour fouiller dans les secrets les plus cachez des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet. de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages. Si la demonstration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer, car si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous detournassiez de vos études à cette occasion. Cette même raison de 1. à 1 + 2. se peut aussi appliquer à la proportion des côtez des quarrez qui composent l'hypoténuse, mais en un sens contraire à celui des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtez pairs, au même sens qu'aux parties des impairs. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les methodes que vous donnez, tant pour trouver les quarrez, que les côtez des triangles qui appartiennent aux hypoténuses composées sont veritablement fort belles, & vous avez la methode de si bien disposer vos regles, que cela leur donne une certaine grace, qui les fait encore agreer davantage; mais elles ne suivent pas mon intention, car je n'ay

point entendu qu'on se servit des quarez, ny des triangles des parties des hypotenusés composées, mais seulement desdites parties, par exemple, je demande une maniere de trouver que 65. est composé des quarez 64. 1. & 49. 16. suposant seulement qu'il a 5. & 13. pour les parties premieres, sans employer à cet effet le quarré 4. & 1. ny les côtez 3. & 4. non plus que ceux qui appartiennent à 13.

Des 4. proprietés des triangles que je vous avois proposés, vous avez fort bien trouvé la 2. pour les 3. autres vous n'avez pas suivi mon intention, partant il faut que je m'éclaircisse plus que je n'avois fait. La premiere est facile.

Que le triangle rectangle soit ABC , il le faut diviser en deux triangles ABD , ADC , avec la perpendiculaire AD .

Et derechef le triangle ADC , en deux triangles EDC , par la perpendiculaire DE & l'autre pareillement ABD , en deux, sçavoir, ADF , BDF , par la perpendiculaire DF .

Et derechef les triangles BDF , ADF , ADE , DEC , par les autres perpendiculaires FO , FI , EL , EN , & continuer ainsi tant qu'on voudra, & faire que toutes les lignes, & sections d'icelles, comme AL , LI , IO , BO , OD , DN , NC , soient nombres entiers.

Vous donnez par apres les triangles dont le moindre côté est different d'un quarré de chacun des deux autres. Je sçay bien que la moitié de ceux qui ont 1. pour difference de leurs petits côtez, ont aussi cette propriété, sçavoir, ceux qui commencent par un nombre pair, mais je n'attendois pas que vous deussiez vous servir de ceux là, esperant que vous donneriez le moyen de les trouver tous, & afin d'exclurre les susdits, on pourroit ainsi proposer le probleme.

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour difference de leur petit côté à chacun des deux autres côtez, en sorte que l'une des differences ne puisse pas mesurer l'autre.

Pour l'autre propriété des triangles, qui est d'avoir un autre triangle relatif en differences, en sorte que la difference des deux grands côtez du premier soit celle des deux petits côtez du second, & la difference des deux petits côtez du premier soit celle des deux grands côtez du second comme on voit aux triangles,

$$11. 49. 60. 1. 61. \quad | \quad 119. 1. 120. 49. 169.$$

Vous n'avez pas considéré attentivement cette proposition, car les triangles que vous donnez,

$$449. 98. 351. 71. 280. \quad | \quad 949. 98. 851. 431. 420.$$

N'ont pas cette propriété, mais en ont une autre, qui est que les grands côtez de chacun ont pareille difference, sçavoir 98. & en outre que les 2. hypotenusés ont pareille difference que les deux grands côtez, mais ce n'est pas ce que je demande, car aux triangles,

$$11. 49. 60. 1. 61. \quad \& \quad 119. 1. 120. 49. 169.$$

Vous voyez que 120. & 169. n'ont pas même difference que 60. & 61. ny 61. & 169. même difference que 60. & 120. Il faudroit donc pour satisfaire à la question qu'en vos triangles, il y eût même difference de 449. à 351. que de 851. à 420. & de 351. à 280. que de 949. à 851.

Vous me proposez par apres de trouver un nombre qui soit polygone autant de fois qu'on voudra & non plus. Je vous diray qu'il y a quelques années que je m'étois mis à la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'avisay, que les figures qui sont maintenant en usage sont si extravagantes, lors qu'on les veut mettre en pratique, j'entens quand on les veut représenter avec des jettons, ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimeres, ou crotelles, que figures, lesquelles si elles ne sont entierement regulieres, au moins doivent elles en approcher le plus que faire se peut.

Cela fut cause que je quittay ce que j'avois commencé pour me mettre à reformer ces figures, & Dieu m'a fait la grace d'y réussir en quelque façon, car j'ay trouvé une maniere de faire des figures regulieres en nombres d'une infinité de sortes, & d'autres

aussi qui n'ont point d'angles ingrediens de tant de côtez qu'on voudra. J'ay en suite considéré quelques-unes de leurs proprietés, & ce qui depend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arresté aux figures communes, que je nommerois plutôt progression de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles, par lequel elles sont formées. Je croy bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en estes vous pas encore advisé; mais pour les communes, on peut considerer vôtre question en deux manieres.

La premiere, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte, qu'il enveloppe tous les polygones inferieurs, c'est à dire que si ce nombre est par exemple Eptagone il doit aussi être Exagone, Pent. Quarré, & triangle; & ainsi pour avoir un nombre qui fut 7. fois polygone, il en faudroit donner un qui fut figure de 9. 8. 7. 6. 5. 4. & 3. côtez; ce qui seroit à la verité fort difficile, & il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres qui sont seulement triangles, quarrés, & pentagones deviennent incontinent fort grands, & c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre consideration est, qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non; je n'ay pas encore recherché cela; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

L'autre question que vous me faites contient deux problemes, l'un de choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra, & non plus.

L'autre est de determiner à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtez.

Pour soudre ces problemes, il faut considerer que tout nombre premier different de l'unité d'un nombre divisible par 8. est la somme des deux petits côtez d'un triangle, & tout nombre qui est la somme des deux petits côtez d'un triangle, auquel les côtez sont premiers entr'eux differe de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondemens il faut faire la même chose avec ces nombres, qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs $+ 1$. pour trouver ce qui est requis par les problemes si on demandoit des hypotenusés, au lieu de la somme des deux petits côtez; il seroit superflu de deduire cela plus au long, intelligenti loquor. Si vôtre methode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, & aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtez; sans avoir les quarrés & doubles quarrés, dont elle est la difference; car ces sommes ont cette propriété d'être toujours deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & si cette somme est un nombre composé d'autres de même nature, comme 119. composé de 17. & 7. il sera 4. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la même chose pour l'enceinte entiere des triangles, que pour la somme des deux petits côtez.

Sur le sujet des triangles; voicy ce que je vous proposeray encore.

Une hypotenusé composée étant donnée avec les quarrés premiers entr'eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221. soit l'hypotenusé donnée, avec les quarrés qui la composent, sçavoir 100. 121. & 196. 25. il faut trouver par le moyen d'iceux que 221. à 13. & 17. pour parties.

J'attens de vous la maniere de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances $- 1$. en toute analogie, & principalement en celle de 2. Je suis, &c.

Exemple. Que le triangle soit 28. 45. 53. le moyen côté fera l'hypoténuse 53. la différence de 28. à 45. qui est 17. fera le moindre & leur somme 73. fera le plus grand, on aura donc 17. 53. 73. pour les racines des quarez cherchez. Et si on prend tous les triangles commençant par le premier 3. 4. 5. on aura tous lesdits quarez.

Après cette regle generale j'en ay considéré deux particulieres, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, sçavoir que le moindre des 3. quarez demeurant toujours le même, on ait les 2. autres en une infinité de façons, & à laquelle vous croyez que je n'ay pas pris garde, quoy qu'il y ait déjà long-temps que je l'ay trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectanglés,

Que tout nombre & chacun d'iceux est la difference des 2. moindres côtéz d'une infinité de triangles ;

Et tout nombre premier different de l'unité d'un multiple de 8. ou composé desdits nombres premiers seulement, est la difference des moindres côtéz d'une infinité de triangles rectanglés primitifs.

Et y ayant des voyes certaines pour trouver tous les triangles qui ont une même difference en leurs moindres côtéz, on aura aisément tous les quarez susdits. Sur quoy il faut remarquer que si le nombre proposé, qui doit être la racine moindre du quarré de 3. & qui doit être la difference des deux petits côtéz du triangle n'est divisible que par un seul nombre premier different de 1. d'un octonaire comme sont 7. 49. 343. 17. 289. &c. le nombre fera la difference des petits côtéz de 2. triangles qu'on peut nommer Surprimitifs, pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, & ces deux triangles sont toujours les moindres, dont l'un commence par un pair, & l'autre par un impair, & d'iceux se forme l'infinité des autres. Voicy la maniere dont je me fers.

3. 2.		4. 1.	Si je veux par exemple avoir tous les triangles qui ont 7. de
8. 3.		9. 4.	difference entre leurs moindres côtéz je cherche les deux
19. 8.		2. 9.	premiers triangles qui ont cette difference, & trouve 5. 12. 13. &
46. 19.		53. 22.	8. 15. 17. je prens les racines des quarez de chaque triangle, sçavoir

3. 2. & 4. 1. & mets chaque couple en teste d'une colonne. J'ay donc pour le 1. 3. 2. Pour avoir le triangle suivant je prens la plus grande racine du 1. pour la moindre du 2. sçavoir 3. & pour la plus grande je prens le double de la plus grande du 1. + la moindre, ainsi j'auray 8. qui est double de 3 + 2. ce 8. fera la moindre racine du 3. triangle, & la plus grande dudit 3. fera 19. qui est double de 8 + 3. on fera la même chose à l'autre couple 4. 1. & on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

Ayant donc tous les triangles qui ont 7. pour difference de leurs moindres côtéz, il fera facile, parce que a esté dit cy-devant de trouver tous les quarez arithmetiquement proportionaux, dont le moindre est 49. Si le susdit moindre quarré étoit divisible par 2. nombres premiers de même nature que les susdits il y auroit 4. fouches, dont tous les triangles dependroient; s'il étoit divisible par 3. nombres premiers, il y en auroit 8. qui ne dependroient point l'un de l'autre, &c. Ainsi 161. composé de 7. & 23. est la difference des petits côtéz des triangles surprimitifs 19. 180. 181. | 60. 221. 229. | 279. 440. 521. | & 400. 561. 689. & de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs, qui auront le même 161. pour difference, & partant le quarré de 161. fera le moindre quarré des 3. proportionaux en une infinité de sortes. Il faut excepter l'unité de ce qui a esté dit, car elle sert bien de difference à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule fouche, qui est le triangle 3. 4. 5. d'où dependent tous les autres; on aura

7. 13. 17.		7. 17. 23.	donc les quarez proportionaux, dont les racines
7. 73. 103.		7. 97. 137.	sont icy; & on les peut continuer tant qu'on voudra
7. 425. 601.		7. 565. 799.	en continuant les triangles. Voilà donc pour la 1.
7. 2477. 3503.		7. 3293. 4657.	chose qui appartient ausdits quarez.

La 2. est de trouver lesdits 3. quarez en telle sorte qu'ils soient comme enchainez l'un à

l'autre, & que le dernier & plus grand des 3. soit le 1. des 3. suivans, comme on peut voir en ces colonnes, la fabrique desquelles je vous envoie au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1.	29.	41.
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.						

Il y a aussi des voyes pour avoir les differences égales desdits quarrez, car en la 1. colonne si on multiplie 24. par les sommes de tous les quarrez, lesquelles sommes sont 1. 5. 14. 30. &c. on aura les differences des quarrez. Et en la seconde colonne il faudroit multiplier 24. par les sommes des seuls quarrez impairs; il y a d'autres choses à considérer là dessus, que je n'ay pas maintenant le loisir de deduire plus au long.

Me voicy maintenant à l'endroit de vôtre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtez d'un triangle, & sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne sceusse pas que chacun de ces nombres peut servir de difference à une infinité de quarrez & de doubles quarrés; vous vous estes fondé sur un advertissement que je donnois, que lesdits nombres sont toujours 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, mais je n'ay pas dit qu'ils fussent seulement 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, comme vous croyez avoir leu; il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres, pour ne s'être pas apperceu d'abord que 7. est 4. fois la difference entre de fort petits nombres, sçavoir entre 1. & 8. | 2. & 9. | 18. & 25. | 25. & 32. & je ne vous ay pas cotté cela pour une propriété desdits nombres; mais vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtez, sans avoir les quarrez, & doubles quarrez, dont il est la difference, il falloit vous advertir que lesdits nombres étoient toujours 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, car il y a 2. couples dont je me fers pour avoir ledit triangle, par exemple pour avoir le triangle dont 7. est la somme des 2. côtez je me fers de 1. & 8. & de 2. & 9. & pour ce que j'étois pressé je n'eus pas le loisir de m'éclaircir d'avantage, je n'entens pas que lesdits couples soient 2. 9. & 18. 25. comme vous avez creu, mais 1. 8. & 2. 9. & ce que j'observe en cecy est que lesdites sommes sont 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la difference donnée; sçavoir à un des couples le quarré est moindre, & à l'autre couple c'est le double quarré; cela s'observe toujours ainsi; & aux nombres qui sont composez de 2. nombres premiers comme 119. il y a 4. couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la methode dont je me fers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux auxquels un des nombres est moindre que la difference. Ainsi à 17. les 2. couples utiles sont 1. 18. & 8. 25. à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17. & selon vôtre methode même on se servira aussi bien de 1. 18. que de 25. 8. car si à 25. 8. on prend 2. & la difference de 5. à 2. de même à 1. 18. on aura 3. & la difference de 1. à 3. & on aura en l'une & l'autre sorte les mêmes nombres 2. 3. De mêmes si on donnoit 161. on auroit 4. couples, sçavoir 1. 162. | 8. 169. | 81. 242. | 128. 289. à chacun desquels il y a un nombre moindre que 161. & pour trouver les triangles je me fers des racines des doubles quarrez, car elles sont les racines des quarrez qui composent l'hypothénuse, ainsi à 17. on aura 2. & 3. racines des doubles quarrez 8. 18. mais quand il y en a 4. comme à 161. je prends les extremes, sçavoir 9. 8. & celles du milieu 2. 11. qui donneront les triangles 17. 144. 145. & 44. 117. 125. Pour avoir le côté pair du triangle il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrez, ainsi le double de 9. par 8. est 144. & le

double de 2. par 11. est 44. mais pour le côté impair on prend le produit des racines des quarrez simples ainsi 1. par 17. donne 17. & 9. par 13. donne 117. le 1. pour le triangle 17. 144. 145. le 2. pour 44. 117. 125. Vous voyés si j'ay eu raison de dire que les nombres susdits sont la difference de 2. couples quand ils sont premiers, & de 4. couples lorsqu'ils sont divisibles par 2. nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux est la façon de trouver tous les couples dont un desdits nombres est la difference; car selon ma methode il est necessaire d'avoir ces deux couples qui sont comme 2. fouches.

Exemple.
On me demande tous les quarrez & doubles quarrez dont 7. est la difference. Je cherche les 2. couples utiles à chacun desquels il y a un nombre moindre que 7. j'auray 1. 8. & 9. 2. je prens leurs racines & en fais 2. colonnes separées comme on voit icy, & mets

Quarrez	Doubles quarrez.	Quarrez	Doubles quarrez.
1.	2.	3.	1.
5.	3.	5.	4.
11.	8.	13.	9.
27.	19.	31.	22.
65.	46.	75.	53.
157.	111.	181.	128.

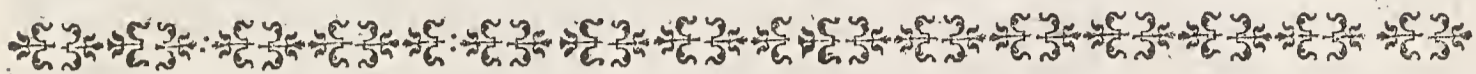
en chaque colonne les racines des quarrez d'un côté, & celles des doubles quarrez de l'autre. J'ay donc d'un côté 1. 2. pour avoir les racines des couples suivans. Je prens la somme de 1. 2. qui est 3. pour la racine du double quarré; & la somme des racines des deux doubles quarrez prochains pour la racine du quarré. Ainsi la somme de 1. 2. est 3. & celle de 3. 2. est 5. j'ay donc 5. & 3. pour le 3. couple, la somme de 5. 3. est 8. celle de 8. & 3. est 11. On poursuit ainsi autant qu'on veut, & l'autre colonne qui commence par 3. 1. se fait de même. A chaque colonne la rangée de main droite dont les nombres sont pairs & impairs alternativement contient les racines des doubles quarrez, lesquels sont plus grands que les quarrez, lors que la racine du double quarré est paire comme 1. 2. & 11. 8. mais le double quarré est moindre quand sa racine est impaire; ce qui a lieu lorsque le moindre quarré des 2. qui composent l'hypotenuise du triangle dont ladite difference est la somme des côtez, est impair, comme à 3. 4. 5. mais c'est le rebours, quand le moindre quarré est pair comme au triangle 5. 12. 13. Je laisse le reste pour le premier voyage, auquel je vous enverray aussi la methode dont je me fers pour former les triangles relatifs en difference, comme 11. 60. 61. & 119. 120. 169. car je ne me fers pas des 3. quarrez proportionaux. Voicy seulement ce que je vous proposeray.

1. Trouver le moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra, & non plus la somme de 2. quarrez.
2. Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la difference des deux moindres côtez, il reste un quarré. Par exemple si le triangle cherché étoit 7. 24. 25. il faudroit qu'ôtant 98. de 289. le reste 191. fut un quarré.
3. Trouver un nombre qui serve d'hypotenuise à tant de triangles qu'on voudra & non plus, à chacun desquels le produit du moindre côté par l'hypotenuise soit plus grand que le quarré du moyen côté.
4. Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrez constitutifs du triangle doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles ayent la propriété du 3. probleme.

Pour cecy il y a autant de danger que les racines pechent en excez, qu'en defaut, mais elles ont un espace assez grand pour s'égayer, & elles ne sont pas gênées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines sont en proportion double, ou moindre, ou si elles sont en proportion triple, ou plus grande, les triangles n'auront pas ladite propriété. Entre ces deux proportions il y a un grand espace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'est pas

si grand que la difference & intervalle des proportions double , & triple , mais est un peu plus retrecy.

Vous n'avez pas pris garde , que je vous avois proposé par ma precedente de faire la même chose de l'enceinte entiere du triangle que vous demandiez de la somme des 2. moindres côtez. Je suis , &c.



*Lettre de M. de Fermat au Reverend Pere Mersenne
de l'Ordre des Minimes. A Paris.*

MON REVEREND PERE,

Je vous dois deux réponses pour les deux dernières Lettres que j'ay receuës de vôtre part, & que j'ay trouvées toutes deux en même temps à mon retour de la campagne, le sujet de la première concerne Monsieur Des-Argues, & celui de la seconde Monsieur de Frenicle. Je suspens la réponse aux questions de Monsieur Des-Argues jusques à ce que j'auray veu par vôtre faveur le troisième Livre des Coniques de Mr. Mydorge, & les autres s'il y en a d'imprimez depuis les deux premiers qui sont les seuls que j'ay en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'estendre sur tout ce qu'il semble que vous desirés de moy, & cependant je suis obligé de vous dire que j'estime beaucoup Monsieur Des-Argues, & d'autant plus qu'il est luy seul inventeur de ses Coniques. Son livret qui passe, dites vous, pour jargon, m'a paru tres-intelligible & tres-ingenieux. Pour Monsieur de Frenicle ses inventions en Arithmetique me ravissent, & je vous declare ingeniement que j'admire ce genie, qui sans ayde d'Algebre pouffe si avant dans la connoissance des nombres entiers, & ce que j'y trouve de plus excellent consiste en la vitesse de ses operations, dequoy font foy les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aisance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ses routes, je luy en aurois tres-grande obligation, & ne ferois jamais difficulté de l'advoüer, car les voyes ordinaires me lassent, & lors que j'entreprends quelqu'une de ces questions, il me semble que je vois devant moy

Magnum maris æquor arandum,

à cause de ces frequentes divisions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'est pas que mon Analyse soit defectueuse, mais elle est lente & longue pour ce regard, & j'ose dire sans vanité que si je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choses, je voudrois avoir merité par mes services la faveur que je luy demande, & ne desespere pas même de la payer par quelques inventions qui peut être seront nouvelles à Monsieur Frenicle.

Je viens aux propositions des quarez. Sur quoy je vous puis protester que je n'ay jamais veu, ny Stiphelius, ny cette clavicule, & ne sçay ce que ces Livres contiennent, & pour faire voir que j'ay veu peut-être plus loin qu'eux, & satisfaire à la semonce de Monsieur Frenicle, je vous envoie le quarré de 14. aux conditions requises, duquel si vous ôtez deux enceintes, le restant sera aussi quarré aux conditions requises, & si vous ôtez encore deux enceintes de ce restant, ce qui restera sera encore quarré aux mêmes conditions.

Le 1. Quarré fait en ses lignes 1379.

Le 2. fait 985.

Le 3. fait 591.

Or ne doutés point que je ne possède la methode generale pour faire toute sorte de

quarrez en cette sorte, & aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra le restant soit encore quarré, &c.

Mais à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible, à quoy peut-être Monsieur de Frenicle ne prit pas garde, lors qu'il me proposa d'ôter 3. enceintes de 22. & puis 2. du restant & puis une du restant, car aux deux premiers cas la question est faisable en beaucoup de manieres, mais au 3. je ne l'estime point possible, dequoy la raison dépend de ma regle, laquelle je n'ay pourtant ny trouvée, ny cherchée que depuis que j'ay receu la Lettre de Monsieur Frenicle, & c'est pour cela que je ne determine pas absolument l'impossibilité de ce cas jusqu'à ce que j'auray eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

Mais ce que je trouve de plus beau en ma regle, & que je ne crois pas avoir esté touché ny par Stiphelius, ny par aucun autre, est que je puis determiner en combien de façons & non plus châque quarré peut-être disposé aux conditions requises, comme par exemple s'il m'est permis de demander à Monsieur Frenicle en combien de sortes differentes 22. peut être rangé.

Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, fassent un même nombre, & determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit être rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arithmetique, vous en trouverez un exemple sur le cube 64. à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les 4. quarrez qui font la solidité du cube, en telle façon que le 1. soit dessous, & le second soit mis sur le premier, en telle façon que 53. soit sur 4. & 56. sur 1. Il faut ensuite mettre le 3. sur le 2. en telle façon que 60. soit sur 53. & 57. sur 56. & enfin il faut mettre le 4. sur le 3. en sorte que 13. soit sur 60. & 16. sur 57. Cela étant fait vous aurés un cube qui sera divisé en 12. quarrez, lesquels se trouveront tous disposés aux conditions requises, & il y aura en tout 72. lignes differentes, desquelles chacune fera une même somme, sçavoir 130.

Vous voyez combien cecy est au dessus du Tetraedre & de l'Hexagone de Monsieur Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoy que je ne doute pas qu'il ne puisse être haussé en solide: mais dans ces deux propositions il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises & faire que le restant demeure aussi cube, &c. Je soumets pourtant le tout à mondit Sieur de Frenicle, & crois que si j'avois l'honneur d'être connu de luy, il auroit obmis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resteray pas de luy asseurer l'estime que je fais de luy, & de le conjurer de me faire part de sa methode. Pour le solide de la roulette, je le reduirois bien à des solides plus simples, mais à des Sphæres, cones, ou cylindres qui soient créés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible: excusez si le papier me manque, &c.

Depuis ma Lettre écrite un de mes vieux papiers m'est tombé en main, lequel contient une observation sur le probleme 21. du Livre de Bachet imprimé à Lyon 1624. & qui porte pour titre, Problemes plaisans & delectables qui se font par les nombres.

Voyés l'endroit où il propose de ranger en quarré les nombres consecutifs en progression Arithmetique, en sorte que tous les rangs tant de haut en bas, qu'à côté & par les diametres fassent une même somme, dequoy il baille une regle generale pour les quarrez impairs, & avoüe n'en avoir peu trouver aucune pour les pairs, mais avoir seulement fait plusieurs observations particulieres par le moyen desquelles il a rangé les pairs jusques à 144.

Or pour la regle des quarrez impairs, je dis premierement qu'elle n'est pas de son invention, car elle est dans l'Arithmetique de Cardan, mais d'ailleurs elle ne resout la

question que d'une seule façon qui le peut être en plusieurs. Je dis donc que ma methode range les quarrez pairs, & impairs à l'infiny.

2. Qu'elle les range en toutes les façons possibles, lesquelles augmentent comme les combinaifons à mesure que les quarrez font plus grands.

3. Que la regle des pairement, impairs n'est pas differente de celle des pairement pairs, mais bien la même, quoy que Bachet aye creu qu'elle devoit être differente.

Voicy un exemple de ma methode.

Il range le 25. d'une seule façon, n'y fçachant autre chose, & voyez comme il le range.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

En voicy 3. autres que j'ay choisi parmi plusieurs que ma methode enseigne.

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36. à tâtons d'une seule façon, comme s'ensuit.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

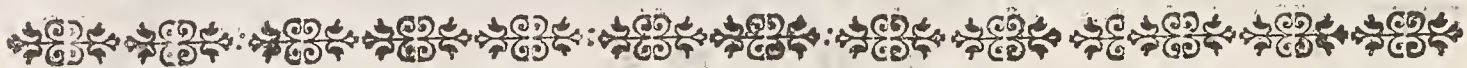
En voicy un autre parmi plusieurs que ma methode fournit, si le temps ne me manquoit je vous en enverrois demi douzaine.

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais parce qu'on pourroit croire que la regle n'a qu'un seul exemple lors que les diametraux demeurent les mêmes. Voicy qui fait voir le contraire. C'est un exemple de ma methode du 64. different de celuy de Bachet, & qui garde pourtant les diametraux.

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
5	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà assez pour donner de l'exercice à Monsieur de Frenicle, car je ne sçay gueres rien de plus beau en l'Arithmétique que ces nombres que quelques-uns appellent Planetarios, & les autres Magicos; & de fait j'ay veu plusieurs Talismans, ou quelques-uns de ces quarrés rangez de la sorte sont décrits, & parmy plusieurs un grand d'argent, qui contient le 49. rangé selon la methode de Bachet, ce qui fait croire que personne n'a encore connu la generale ny le nombre des solutions qui peuvent arriver à chaque quarré; si la chose est sceuë à Paris, vous m'en éclaircirez, en tout cas je ne la dois qu'à moy seul. Je suis, &c.



Lettre de Monsieur de Fermat au Reverend Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

J'ay receu avec grande satisfaction vôtre Lettre accompagnée de celle de Monsieur Frenicle, qui me confirme en l'estime que je faisois de luy. J'y répons succinctement, & premierement sur ce qu'il a doûté que j'eusse une methode generale pour ranger tous les quarrés pairs à l'infiny, je vous prie de l'assurer du contraire, car il est très-certain qu'il y a plus de 10. ans que je la découvris, & en donnay dès lors des exemples sur des quarrés plus hauts que ceux de Bachet comme Mr. Despagnet vous pourroit témoigner. Il est vray que je n'avois pas songé de determiner exactement en combien de façons ces quarrés pouvoient être ordonnez, & j'avoüe que je n'avois pas veu toutes les manieres qui y conduisent, puisque je doûtois même que le quarré peut demeurer Magique en levant une seule enceinte, mais ayant trouvé une regle pour les ordonner en beaucoup de façons, je creus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me semble excusable, puisque je vous envoyay ma Lettre aussi-tôt après la premiere meditation que j'eus fait sur ce sujet. Depuis que j'ay receu la derniere de Monsieur Frenicle, j'ay aussi-tôt découvert que la question du quarré 22. étoit de ma portée, & pour ce que l'operation seroit trop longue qui consiste à ranger le quarré de 22. en telle sorte que levant 3. enceintes il reste Magique, & du restant encore 2. & qu'il demeure Magique, & puis une seule du reste à la même condition, je me contenteray pour ce coup de vous envoyer le quarré qui reste après les trois premieres, & les 2. secondes enceintes ôtées; duquel si vous levez une seule enceinte le reste demeure Magique comme vous verrez.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	254	253	255	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	003	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	223	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	109	367	368	358

Parce que le temps me manque je differe à vous envoyer les 5. enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22. jusques au départ du prochain Courrier.

Après

Après cela vous devés croire que dés que j'auray loisir, j'iray aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

Pource qui est des cubes, je n'en sçay pas plus que Monsieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales seules de quarrez que nous pouvons supposer paralleles à l'Horison, seront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'est pas peu de chose. En attendant qu'une plus longue meditation découvre le reste, je dresseray celui de 8. 10. ou 12. à ces conditions si Monsieur de Frenicle me l'ordonne.

Pour les quarrez qui ont des cellules vuides j'y travailleray au plûtôt.

Ce que j'estime le plus est cét abregé pour l'invention des nombres parfaits, à quoy je suis resolu de m'attacher, si Monsieur Frenicle ne me fait part de sa methode. Voicy trois propositions que j'ay trouvées, sur lesquelles j'espere de faire un grand bastiment.

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procedent de la progression double, comme

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
11	12	13	2047	4095	8191	&c.			

Soient appellez les nombres parfaits, parceque toutes les fois qu'ils sont premiers ils les produisent. Mettez au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle 1. 2. 3. &c. qui soient appellez leurs exposans.

Cela supposé, je dis,

1. Que lors que l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé, comme parceque 6, exposant de 63. est composé, je dis que 63. est aussi composé.

2. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant, comme parceque 7. exposant de 127. est nombre premier, je dis que 126. est multiple de 14.

3. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant, ou que le double de l'exposant. Comme parce que 11. exposant de 2047. est nombre premier, je dis qu'il ne peut être mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22. comme 23. ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22. en effet 2047. n'est mesuré que par 23. & par 89. duquel si vous ôtez l'unité, reste 88. multiple de 22.

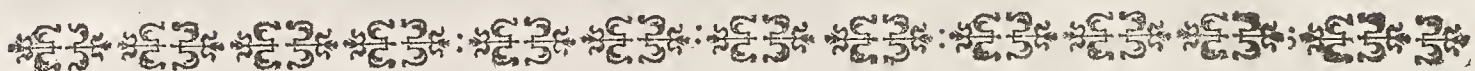
Voilà trois fort belles propositions que j'ay trouvées & prouvées non sans peine. Je les puis appeller les fondemens de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que Monsieur Frenicle ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, & sans doute ces propositions passeront pour tres-belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matieres, & je seray bien aise d'apprendre le sentiment de Monsieur de Roberval.

Au reste vous ou moy avons equivoqué de quelques caracteres au nombre que j'avois creu parfait, ce que vous connoistrez aisement, puisque je vous baillois 137438953471. pour son radical, lequel j'ay pourtant depuis trouvé par l'Abregé tiré de ma 3. proposition estre divisible par 223. ce que j'ay connu à la seconde division que j'ay faite, car l'exposant dudit radical estant 37. duquel le double est 74. j'ay commencé mes divisions par 149. plus grand de l'unité que le double de 74. puis continuant par 223. plus grand de l'unité que le triple de 74. j'ay trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces Abbregez j'en vois déjà naître un grand nombre d'autres, *Et mi par di veder un gran lume.*

Je vous entretiendray un jour de mon progres si Monsieur de Frenicle ne vient au secours, & n'abrege par ce moyen ma recherche des Abbregez, en tout cas je vous conjure de faire en sorte que Mr. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je

me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vacquer à ces choses, je suis, &c.



*Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi
Conseiller au Grand Conseil. A Paris.*

MONSIEUR,

Vous m'obligez toujours, & je connois dans la continuation de vos soins celle de vôtre affection, dequoy je vous rends mille graces. Pour la Geometrie je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité, je n'auray pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions; pour celle de la parabole, je ne l'ay pas examinée ny tentée, je remets tout cecy à ma premiere commodité. Mais de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoie trois nombres parmi plusieurs autres que j'ay trouvés dont les parties aliquotes font le multiple.

Le nombre suivant est sous-triple de ses parties aliquotes, 14942123276641920.

Celuy-cy est sous-quadruple, 1802582780370364661760.

Et celuy-cy aussi, 87934476737668055040.

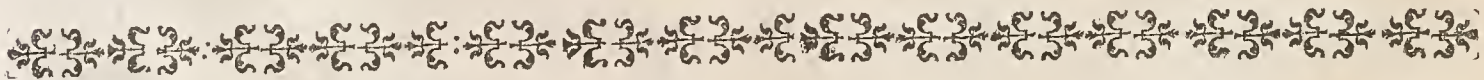
Puisque je me trouve sur cette matiere, en voicy deux que j'ay choisis parmi mes sous-quintuples.

Le premier se produit des nombres suivans multipliez entr'eux, 8388608. 2801. 2401. 2197. 2187. 1331. 467. 307. 289. 241. 125. 61. 41. 31.

Et l'autre se produit des nombres suivans multipliez entr'eux, 134217728. 243. 169. 127. 125. 113. 61. 43. 31. 29. 19. 11. 7.

En voicy encore un sous-double de ses parties de mon invention, lequel multiplié par 3. fait un sous-triple, ledit nombre est, 5100180160.

C'est parmi quantité d'autres que j'ay trouvez que j'ay choisi par avance ceux-cy pour vous en faire part, afin que vous en puissiez juger par cet échantillon. J'ay trouvé la methode generale pour trouver tous les possibles, dequoy je suis assuré que Monsieur de Roberval fera étonné, & le bon Pere Mersenne aussi, car il n'y a certainement quoy que ce soit dans toutes les Mathematiques plus difficile que cecy, & hors Monsieur de Frenicle, & peut-être Monsieur Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le fera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourray vous entretenir une autrefois, & pour exciter par mon exemple les Sçavans du Pais où vous estes, je leur propose de trouver autant de triangles en nombres qu'on voudra, de même aire, ce que Diophante ny Viete n'ont trouvé que pour trois seulement. Je suis, &c.



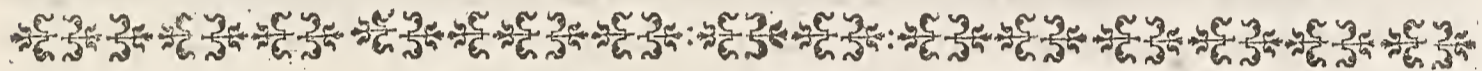
*Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi
Conseiller au Grand Conseil. A Paris.*

MONSIEUR,

Je suis marry de la perte du paquet de Monsieur de S. Martin, je luy écrivois sur le

luy faisois part de quelques propositions, & sur tout de la suivante que Monsieur Frenicle m'avoit autrefois proposée, & qu'il m'advoia tout net ne sçavoir point. Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la difference des deux moindres côtez surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré. Je luy advoiauy aussi pour lors que je n'en sçavois point la solution, & que je ne voyois pas même de voye pour y venir, mais depuis je l'ay trouvée avec autres infinies, voicy le triangle 156. 1617. 1525. Il sert à la suivante question pour laquelle Monsieur Frenicle se metoit en peine de ce prealable. Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit quarré, & le plus petit differe d'un quarré de chacun des deux autres. Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mondit sieur de S. Martin, je m'en remets à vous, je ne resteray pas de luy récrire par la premiere voye.

J'ay donné à Monsieur l'Archevêque un petit memoire de corrections sur le Theon Smyrnæus, que je croy qu'il envoyera à l'Autheur avec le manuscrit de l'Astronomie. Je seray ravy que cette occasion me serve à être connu de Monsieur Bulliaud de qui le merite étant connu à tout le monde m'a esté pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Theon, où j'ay particulièrement admiré la correction du Decret de Timothée, qui ne pouvoit être deüie qu'à une main de cette importance. Je suis, &c.



Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Le 29. Juillet 1654.

MONSIEUR,

L'impatience me prend aussi-bien qu'à vous, & quoy que je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je receus hier au soir de la part de Mr. de Carcavi vôtre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ay pas le loisir de m'étendre, mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dez & des parties dans la parfaite justesse, j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la verité, apres la rencontre admirable où je me trouve avec vous; j'admire bien davantage la methode des parties que celle des dez. J'avois veu plusieurs personnes trouver celles des dez, comme Mr. le Chevalier de Meré, qui est ecluy qui m'a proposé ces questions, & aussi Monsieur de Roberval, mais Mr. de Meré n'avoit jamais pû trouver la juste valeur des parties ny de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Vôtre methode est tres-seure, & est celle qui m'est la premiere venue à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ay trouvé un Abbrege, & proprement une autre methode bien plus courte & plus nette que je voudrois vous pouvoir dire icy en peu de mots. Car je voudrois desormais vous ouvrir mon cœur s'il se pouvoit, tant j'ay de joye de voir nôtre rencontre. Je voy bien que la verité est la même à Tolose & à Paris. Voicy à peu près comme je fais pour sçavoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent par exemple en trois parties, & chacun a mis 32. pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux & l'autre une, ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, sçavoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils font deux parties à deux parties; & par consequent s'ils veulent se separer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, sçavoir chacun 32. pistoles. Considerez donc, Monsieur, que si le premier gagne il luy appartient 64. s'il perd il luy appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hazarder cette partie, & se separer sans la jouer, le premier doit dire, je suis seur d'avoir 32. pistoles, car la perte

même me les donne , mais pour les 32. autres, peut-être je les auray , p...
aurez, le hazard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, & me donnez
outre cela mes 32. qui me font seures, il aura donc 48. pistoles & l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, & l'autre point, & ils commencent
à jouer une partie, le sort de cette partie est tel, que si le premier la gagne il tire tout
l'argent, 64. pistoles, si l'autre la gagne les voilà revenus au cas precedent, auquel le
premier aura deux parties, & l'autre une; Or nous avons déjà montré qu'en ce
cas il appartient à celui qui a les deux parties 48. pistoles, donc s'ils veulent ne point
jouer cette partie, il doit dire ainsi, si je la gagne, je gagneray tout, qui est 64. si je la
perds, il m'appartiendra legitimement 48. Donc donnez - moy les 48. qui me font
certaines, au cas même que je perde, & partageons les 16. autres par la moitié,
puis qu'il y a autant de hazard que vous les gagnez comme moy, ainsi il aura 48 & 8.
qui font 56. pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie & l'autre point.

Vous voyez, Monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel,
que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, & partant par le cas precedent
il luy appartient 56. s'il la perd ils font partie à partie, donc il luy appartient 32 pistoles.
Donc il doit dire si vous voulez ne la pas jouer donnez-moy 32. pistoles qui me font
seures, & partageons le reste de 56. par la moitié, de 56. ôtez 32. reste 24. partagez donc
24. par la moitié prenez en 12. & moy 12. qui avec 32. font 44.

Or par ce moyen vous voyez par les simples soustractions que pour la premiere par-
tie il appartient sur l'argent de l'autre 12. pistoles, pour la seconde autres 12. & pour
la dernière 8.

Or pour ne plus faire de mystere, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, &
que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entens sa valeur
sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux, est double de la partie
de 3. & quadruple de la dernière partie de 4. & octuple de la dernière partie de 5. &c.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver, elle est donc ainsi,
car je ne veux rien déguiser. Et voicy le probleme dont je faisois tant de cas, comme
en effet il me plaît fort.

Estant donné tel nombre de parties qu'on voudra trouver la valeur de la premiere.

Soit le nombre des parties donné par exemple 8. prenez les huit premiers nombres
pairs, & les huit premiers nombres impairs, sçavoir 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16.

Et 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. multipliés les nombres pairs en cette sorte le premier par le
second, le produit par le troisième, le produit par le 4. le produit par le cinquième,
&c. Multipliez les nombres impairs de la même sorte, le premier par le second, le pro-
duit par le troisième, &c. le dernier produit des pairs est le denoninateur, & le dernier
produit des impairs est le numerateur de la fraction qui exprime la valeur de la premiere
partie de 8. C'est à dire que si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le
produit des pairs, il en appartiendrait sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par
le produit des impairs.

Ce qui se demonstre, mais avec beaucoup de peine par les combinaisons telles que
vous les avez imaginées, & je n'ay peu les demonstrier par cette autre voye que je viens
de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons, & voicy les propositions qui y
menent, qui sont proprement des propositions arithmetiques touchant les combinai-
sons, dont j'ay d'assez belles proprietes.

Si d'un nombre quelconque de Lettres, par exemple de 8. A, B, C, D, E, F, G, H, vous
en prenez toutes les combinaisons possibles de 4. lettres, & en suite toutes les combi-
naisons possibles de 5. lettres, & puis de 6. de 7. & de 8. &c. & qu'ainsi vous preniez
toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jus-
qu'au tout, je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4. avec

chacune des combinaisons supérieures, la somme fera le nombre tantième de la progression quaternaire à commencer par le binaire qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, & je vous le diray en Latin, car le François n'y vaut rien. Si quotlibet litterarum verbi gratia octo A B C D E F G H, sumantur omnes combinationes quaternarij, quinquenarij, senarij, &c. usque ad octonarium. Dico si jungas dimidium combinationis quaternarij nempe 35. (dimidium 70.) cum omnibus combinationibus quinquenarij nempe 56. plus omnibus combinationibus senarij nempe 28. plus omnibus combinationibus septenarij nempe 8. plus omnibus combinationibus octonarij nempe 1. factum esse quartum numerum progressionis quaternarij cujus origo est 2. dico quartum numerum, quia 4. octonarij dimidium est.

Sunt enim numeri progressionis quaternarij quibus origo est 2. isti, 2. 8. 32. 128. 512. &c. quorum 2. primus est, 8. secundus, 32. tertius, & 128. quartus, cui 128. æquantur + 35. dimidium combinationis 4. litterarum, + 56. combinationis 5. litterarum, + 28. combinationis 6. litterarum, + 8. combinationis 7. litterarum, + 1. combinationis 8. litterarum.

Voilà la première proposition qui est purement Arithmétique.

L'autre regarde la doctrine des partis, & est telle : il faut dire auparavant si on a une partie de 5. par exemple, & qu'ainsi il en manque 4. le jeu sera infailliblement décidé en 8. qui est double de 4. la valeur de la première partie de 5. sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4. sur 8. (je prens 4. parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, & 8. parce qu'il est double de 4.) & pour dénominateur ce même numérateur, plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi si j'ay une partie de 5. il m'appartient sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$ c'est à dire que s'il a mis 128 pistoles, j'en prens 35. & luy laisse le reste 93. Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour dénominateur & de la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela si vous vous en donnez tant soit peu la peine. C'est pourquoy je trouve inutile de vous en entretenir davantage, je vous envoie neantmoins une de mes vieilles tables.

Je n'ay pas le loisir de la copier, je la referay, vous y verrez comme toujours la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours.

Ceux de la seconde de même.

Ceux de la troisième de même.

Mais en suite ceux de la 4. diminüent.

Ceux de la 5. &c.

Ce qui est étrange.

Je n'ay pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. car il a tres-bon esprit, mais il n'est pas Geometre. C'est comme vous sçavez un grand défaut, & même il ne comprend pas qu'une ligne Mathématique soit divisible à l'infiny, & croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre finy, & jamais je n'ay peu l'en tirer, si vous le pouviez faire on le rendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un six avec un dé il y a avantage de l'entreprendre en 4. comme de 671. à 625.

Si on entreprend de faire Sannes avec deux dez il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et neantmoins 24. est à 36. (qui est le nombre des faces de deux dez) comme 4. à 6. (qui est le nombre des faces d'un dé.)

Voilà quel étoit son grand scandale qui luy faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, & que l'Arithmetique se démentoit.

Mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous estés.

Je mettray par ordre tout ce que j'en ay fait quand j'auray achevé des traitez Geometriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

J'en ay fait aussi d'Arithmetiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander vôtre avis sur cette démonstration.

Je pose le Lemme que tout le monde sçait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continuée depuis l'unité comme 1. 2. 3. 4. étant prise deux fois est égale au dernier 4. menée dans le prochainement plus grand 5. c'est à dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois est égale au produit de A in A + 1.

Maintenant je viens à ma proposition.

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia unitate demptâ sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum. Sint duæ radices R, S, unitate differentes, dico $R^3 - S^3 - 1$ æq. summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ; etenim S vocetur A, ergo R est A + 1. Igitur cubus radice R, seu A + 1 est $A^3 + 3A^2 + 3A + 1$. Cubus vero S seu A est A^3 . Et horum differentia est $3A^2 + 3A + 1$. id est $R^3 - S^3$. Igitur si auferatur unitas, $3A^2 + 3A$ æq. $R^3 - S^3 - 1$, sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur ex lemmate A in A + 1 hoc est $A^2 + A$. Igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æq. $3A^2 + 3A$. Sed $3A^2 + 3A$ æq. $R^3 - S^3 - 1$. Igitur $R^3 - S^3 - 1$ æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum : quod erat demonstrandum.

On ne ma pas fait de difficulté là dessus, mais on ma dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'huy à cette methode, & moy je pretends que sans me faire grace on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent, j'en attens neantmoins vôtre avis avec toute soumission : tout ce que j'ay démontré en Arithmetique est de cette nature, voicy encore deux difficultez.

J'ay démontré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre.

Je pretens que cela est purement Geometrique & dans la severité la plus grande.

De même j'ay resolu le probleme de quatre plans, quatre points & quatre Sphæres, quatre quelconque étant donnez trouver une Sphære, qui touchant les Sphæres donnees passe par les points donnez, & laisse sur les plans des portions de Sphæres capables d'angles donnez, & celuy-cy.

De trois cercles, trois points, trois lignes quelconques étant donnez trouver un cercle qui touchant les cercles, & les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné. J'ay resolu ces problemes plainement n'employant dans la construction que des cercles & des lignes droites.

Mais dans la démonstration je me fers de lieux solides de paraboles ou hyperboles.

Je pretens neantmoins qu'attendu que la construction est plane ma solution est plane, & doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si long-temps, je ne pense jamais vous dire que deux mots, & si je ne vous dis pas ce que j'ay le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois plus je vous admire & vous honnore, & que si vous voyez à quel point cela est, vous donneriez une place dans vôtre amitié à celuy qui est, &c.

Table dont il est fait mention dans la Lettre precedente.

Si on joue chacun 256.

EN

Il m'appar-
tient sur les
256. pistoles
de mon
joueur pour
la

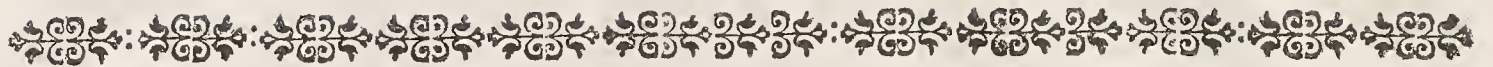
	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
2. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	
3. Partie.	56.	60.	64.	64.		
4. Partie.	42.	40.	32.			
5. Partie.	24.	16.				
6. Partie.	8.					

Si on joue 256. chacun

EN

Il m'appar-
tient sur les
256. de mon
joueur pour

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
La 1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
Les 2. premieres parties.	126.	140.	160.	192.	256.	
Les 3. premieres parties.	182.	200.	224.	256.		
Les 4. premieres parties.	224.	240.	256.			
Les 5. premieres parties.	248.	256.				
Les 6. premieres parties.	256.					



Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 24. Aoust 1654.

MONSIEUR,

Je ne puis vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'Ordinaire passé, & mêmes j'ay quelque repugnance à le faire, de peur qu'en cecy cette admirable convenance qui étoit entre nous, & qui m'étoit si chere ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de differens avis sur ce sujet. Je vous veus ouvrir toutes mes raisons, & vous me ferez la grace de me redresser si j'erre, ou de m'affermir si j'ay bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & sincerement, car je ne me tiendray pour certain que quand vous serés de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs votre methode qui procede par les combinaisons est tres-seure. Mais quand il y en a trois, je croy avoir demonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procediez de quelqu'autre maniere que je n'entens pas, mais la methode que je vous ay ouverte, & dont je me sers par tout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulieres où elle est plus courte que la generale) n'est bonne qu'en ces seules occasions, & non pas aux autres.

Je suis seur que je me donneray à entendre, mais il me faudra un peu de discours, & à vous un peu de patience.

Voicy comment vous procedés quand il y a deux joueurs.

Si deux joueurs joians en plusieurs parties se trouvent en cét état qu'il manque deux parties au premier, & trois au second, pour trouver le parti il faut (dites vous) voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous conclüez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, & voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier, & combien pour le second, & partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours là si je ne l'eusse sceu de moy même auparavant, aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puis qu'ils ne sont que deux joueurs) comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dez (parce qu'ils jouent en quatre parties) & maintenant il faut voir combien ces dez peuvent avoir d'assietes differentes. Cela est aisé à supputer, ils en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est à dire le quarré; Car figurons nous qu'une des faces est marquée A, favorable au premier joueur, & l'autre B favorable au second, donc ces quatre dez peuvent s'asseoir sur une de ces seize assietes,

aaaa	1
aaab	1
aaba	1
aabb	1
abaa	1
abab	1
abba	1
abbb	2
baaa	1
baab	1
baba	1
babb	2

aaaa
bbbb.

bbaa	1
bbab	2
bbba	3
bbbb	2

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner, donc il en a 11. pour luy, & parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a 3. B le peuvent faire gagner, donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11. à 5. Voilà votre methode quand

ily

il y a deux joueurs. Sur quoy vous dites que s'il y en a davantage il ne sera pas difficile de faire les partys par la même methode.

Sur cela, Monsieur, j'ay à vous dire que ce party pour deux joueurs fondé sur les combinaisons est tres-juste & tres-bon. Mais que s'il y a plus de deux joueurs il ne sera pas toujours juste, & je vous diray la raison de cette difference.

Je communiquay vôtre methode à nos Messieurs, sur quoy Monsieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le party sur la supposition qu'on jouë en 4. parties, veu que quand il manque 2. parties à l'un & 3. à l'autre, il n'est pas de necessité que l'on jouë 4. parties pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou 3. ou à la verité peut-être 4.

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoy on pretendoit de faire le party juste sur une condition feinte qu'on jouera 4. parties, veu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, & qu'au moins si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré.

De sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme, je luy répondis que je ne me fondois pas tant sur cette methode des combinaisons, laquelle vetitablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre methode universelle à qui rien n'échape, & qui porte sa demonstration avec foy, qui trouve le même party precisément que celle des combinaisons, & de plus je luy démontray la verité du party entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte.

N'est-il pas vray que si deux joueurs se trouvant en cét état de l'hypotese qu'il manque deux parties à l'un & 3. à l'autre conviennent maintenant de gré à gré qu'on jouë quatre parties complettes, c'est à dire qu'on jette les quatre dez à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vray, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties le party doit être tel que nous avons dit suivant la multitude des affietes favorables à chacun.

Il en demeura d'accord, & cela en effet est demonstratif, mais il nyoit que la même chose subsistat en ne s'astreignant pas à jouer les 4. parties, je luy dis donc ainsi.

N'est-il pas clair, que les mêmes joueurs n'étant pas astreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ny advantage s'astreindre à jouer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car si le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, veu que s'il les gagne il n'a pas mieux gagné, & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne luy suffisent pas, puis qu'il luy en faut trois, & ainsi il n'y a pas assés de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considerer qu'il est absolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entieres, donc puisque ces deux conditions sont égales & indifferentes le party doit être tout pareil en l'une & en l'autre, or il est juste quand ils sont obligez de jouer 4. parties comme je l'ay montré.

Donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le démontray, & si vous y prenez garde cette demonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux joueurs, & qu'en l'une & en l'autre un même gagnera toujours, & si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la même pointe pour trois joueurs.

Et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second, & deux au troisième: pour faire le party suivant la même methode des combinaisons il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons

fait quand il y avoit deux jöüeurs, ce sera en 3. Car ils ne sçauroient jöüer 3. parties sans que la decision soit arrivée necessairement.

Il faut voir maintenant combien 3. parties se combinent entre trois jöüeurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & suivant cette proportion distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypotese de deux jöüeurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé, c'est la troisième puissance de 3. c'est à dire son cube 27.

Car si on jette trois dez à la fois (puis qu'il faut jöüer trois parties) qui ayent chacun 3. faces, puis qu'il y a trois jöüeurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le second, l'autre C pour le troisième.

Il est manifeste que ces trois dez jettez ensemble peuvent s'asseoir sur 27. assietes differentes, sçavoir,

aaa	1		
aab	1		
aac	1		
aba	1		
abb	1	2	
abc	1		
aca	1		
acb	1		
acc	1		3
baa	1		
bab	1	2	
bac	1		
baa	1	2	
bbb	1	2	
bbc	1	2	
bca	1		
ccb	1	2	
bcc	1		3
caa	1		
cab	1		
cac	1		3
cba	1		
cbb	1	2	
cbc	1		3
cca	1		3
ccb	1		3
ccc	1		3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les assietes où il y a un A sont pour luy, donc il y en a 19.

Il manque deux parties au second, donc toutes les assietes où il y a 2. B sont pour luy, donc il y en a 7.

Il manque deux parties au 3. donc toutes les assietes où il y a 2. C sont pour luy, donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19. 7. 7. on se tromperoit trop grossierement, & je n'ay garde de croire que vous le fassiez ainsi. Car il y a quelques faces favorables au premier & au second tout ensemble comme A B B, car le premier y trouve un A qu'il luy faut, & le second deux B, qui luy manquent, & ainsi A C C est pour le premier & le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme vallans la somme entiere à chacun, mais seulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'assiete A C C, le premier, & le troisième auroient même droit à la somme ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié, mais s'il arrive l'assiete A A B, le premier gagne seul, il faut donc faire la supputation ainsi.

Il y a 13. assietes qui donnent l'entier au premier, & 6. qui luy donnent la moitié, & huit qui ne luy valent rien.

Donc si la somme entiere est une pistole.

Il y a 13. faces qui luy valent chacune 1. pistole.

Il y a 6. faces qui luy valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole.

Et 8. qui ne valent rien.

Donc en cas de party il faut multiplier ;

13. Par une pistole qui font.

6. Par une demy qui font.

8. Par zero, qui font.

13

3

0

Somme 27.

Somme 16

Et diviser la somme des valeurs 16, par la somme des assietes 27. qui fait la fraction $\frac{16}{27}$ qui est ce qui appartient au premier en cas de partys, sçavoir 16. pistoles de 27.

Le party du second & du troisième jöüeur se trouvera de même.

Il y a 4. affietes qui luy valent 1. pistole, multipliés,
 Il y a 3. affietes qui luy valent $\frac{1}{2}$ pistoles, multipliés,
 Et 20. affietes que ne luy valent rien.

Somme 27.

Somme $5 \frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5. pistoles & $\frac{1}{2}$ sur 27. & autant au troisième,
 & ces trois sommes $5 \frac{1}{2}$, $5 \frac{1}{2}$ & 16. étant jointees font les 27.

Voilà, ce me semble, de quelle maniere il faudroit faire les partys par les combinaisons suivant vôtres methode, si ce n'est qui vous ayés quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis sçavoir.

Mais si je ne me trompe ce party est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue en 3. parties infailiblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu là est qu'on ne joue que jusques à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui luy manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue 3. parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, & rien de necessité.

Mais d'où vient, dira t'on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs?

En voicy la raison.

Dans la condition veritable de ces trois joueurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition est que dès qu'un a gagné, le jeu cesse; mais en la condition feinte deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties: sçavoir si le premier en gagne une qui luy manque, & un des autres deux qui luy manquent, car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux joueurs la condition feinte & la veritable convenoit pour les avantages des joueurs en tout, & c'est ce qui met l'extreme difference entre la condition feinte & la veritable.

Que si les joueurs se trouvant en l'état de l'hypothese, c'est à dire s'il manque une partie au premier, & deux au second, & deux au troisième, veulent maintenant de gré à gré & conviennent de cette condition, qu'on jouera trois parties completttes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entiere (s'ils se trouvent seuls qui l'ayent atteint) ou s'il se trouve que deux l'ayent atteint qu'ils la partageront également.

En ce cas le party se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16. le second, $5 \frac{1}{2}$ le troisième, $5 \frac{1}{2}$ de 27. pistoles, & cela porte sa demonstration de foy mêmes en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition non pas qu'on joue necessairement 3. parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entr'eux ait atteint ses parties, & qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17. pistoles, au second 5. au troisième 5. de 27.

Et cela se trouve par ma methode generale qui determine aussi qu'en la condition precedente il en faut 16. au premier $5 \frac{1}{2}$ au 2. & $5 \frac{1}{2}$ au 3. sans se servir des combinaisons, car elle va par tout seule & sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ay d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus medité. Mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premieres veuës sont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

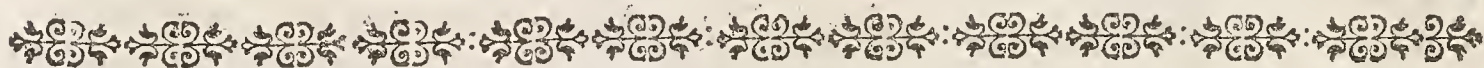
Je ne laisse par de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous.

Je croy vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle est l'est aussi quelquefois entre trois

joüeurs , comme quand il manque une partie à l'un , une à l'autre , & deux à l'autre , parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne fuffit pas pour en faire gagner deux , mais elle n'est pas generale , & n'est bonne generalmente qu'au cas seulement qu'on foit aſtreint à joüer un certain nombre de parties exactement.

De forte que comme vous n'aviés pas ma methode quand vous m'avez propoſé le party de pluſieurs joüeurs , mais ſeulement celle des combinaifons , je crains que nous ſoyons de ſentimens differens ſur ce ſujet , je vous ſupplie de me mander de quelle forte vous procédez en la recherche de ce party.

Je recevray vôtre réponſe avec reſpect & avec joye , quand même vôtre ſentiment me ſeroit contraire , je ſuis , &c.

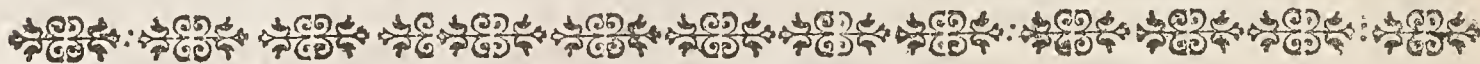


Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 27. Octobre 1654.

MONSIEUR,

Vôtre derniere Lettre m'a parfaitement ſatisfait , j'admire vôtre methode pour les partys , d'autant mieux que je l'entens fort bien , elle eſt entierement vôtre , & n'a rien de commun avec la mienne , & arrive au même but facilement. Voilà nôtre intelligence rétablie , mais , Monsieur , ſi j'ay concouru avec vous en cela , cherchez ailleurs qui vous ſuive dans vos inventions numeriques dont vous m'avez fait la grace de m'envoyer les enonciations , pour moy je vous confeſſe que cela me paſſe de bien loin ; je ne ſuis capable que de les admirer , & vous ſupplie tres-humblement d'occuper vôtre premier loisir à les achever , tous nos Meſſieurs les virent Samedy dernier & les eſtimerent de tout leur cœur : on ne peut pas aiſement ſupporter l'attente de choſes ſi belles & ſi ſouhaitables , penſés y donc , ſ'il vous plaît , & aſſûrez vous que je ſuis , &c.



Problemata proposita à D. de Fermat.

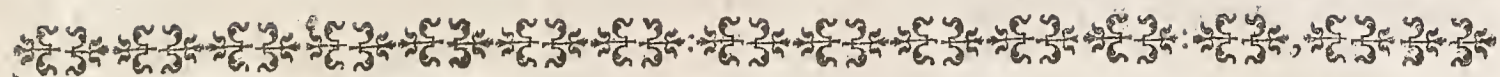
PROponatur (ſi placet) *Vvalliſio* , & reliquis Angliæ Mathematicis , ſequens quaſtio numerica.

Invenire Cubum , qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia. Numerus 343. eſt Cubus , à latere 7. Omnes ipſius partes aliquotæ ſunt 1, 7, 49 ; quæ adjunctæ ipſi 343. conficiunt numerum 400 , qui eſt quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejuſdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus ſuis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has ſolutiones expectamus ; quas ſi Anglia aut Gallia Belgica & Celtica non dederint , dabit Gallia Narbonenſis , eaſque in pignus naſcentis amicitiaë *D. Digby* offeret & dicabit.



Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier
Kenelme Digby.

Du 20. Avril 1657.

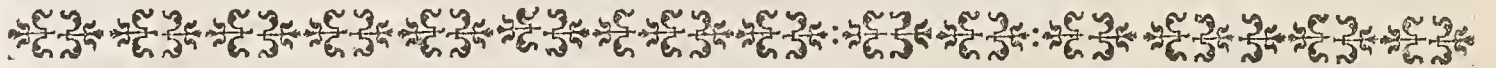
MONSIEUR,

Puis que vous voulés, que les complimens cessent, soit fait. Il me suffit de vous assurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d'occasion à vous le témoigner. J'ay leu l'*Arithmetique Infinitorum* de M. Uvallis, & j'en estime beaucoup l'Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faite par moy depuis fort longues années, & que j'en aye autresfois entretenu l'illustre Toricelli, je ne laisse pas d'estimer l'invention de M. Uvallis, qui sans doute n'a pas sçeu, que j'eusse préoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l'envoyant à Toricelli. Soient les deux droites SKR , & KOF . Et soient descrites les courbes $EGHQ$ d'un côté, & $DABC$ de l'autre, en forme d'hyperboles, dont les asymptotes soient les droites premierement données. Soient encore tirées AG , BH , paralleles à SKR , & les droites BN , AM , GL , HI , paralleles à KOF . En l'hyperbole ordinaire le rectangle NP est égal au rectangle MAO . Mais supposons maintenant, que le produit du quarré BN & de la droite BP , soit égal au produit du quarré MA & de la droite AO . En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la propriété sera, que le parallelogramme BI sera égal à l'espace compris sous la base BH , & les deux courbes $BADF$, $FE GH$ qui vont à l'infini du côté F . Que si le produit du cube BN & de la droite BP , est égal au produit du cube AM & de la droite AO , en ce cas ce sera une autre hyperbole, dont la propriété sera, que le parallelogramme BI sera double de l'espace compris sous la base BH & les deux courbes en montant, ut supra. Et par regle generale, Si le produit d'une puissance de BN par une puissance de BP , est égal au produit d'une pareille puissance de MA par une pareille de AO , en supposant celles de BN & MA pareilles entre elles, comme aussi celles de BP & de AO aussi pareilles, le parallelogramme BI sera à la figure prolongée à l'infini, ut supra, comme la différence de l'exposant de la puissance de BN avec l'exposant de la puissance de BP est à l'exposant de la puissance de BP . De sorte qu'il suit de là, qu'en l'hyperbole ordinaire, l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances étant le même ne donne aucune difference. Et pour faire que l'espace de ladite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de BN soit plus grand que celui de BP , comme il est aisé de remarquer. Tout cecy quoy qu'énoncé un peu diversément se peut tirer du livre de M. Uvallis. Mais il n'a pas fait une speculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doute bien aisé d'être adverti, & qui peut passer pour un des miracles de la Geometrie. Je l'ay autrefois donné à Toricelli aussi bien que la precedente. C'est comme il arrive que quelquesfois l'espace prolongé à l'infini, comme $BADFEGH$ est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, & quelquesfois fini, comme en celles dont les exposants de BN surmontent ceux de BP . On demande, si lors que ledit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive une chose merveilleuse en cette recherche, & laquelle j'ay découverte, & démontrée, c'est que quelquesfois ledit espace quoy que fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelquesfois il en a. Car par exemple, lors que le produit du quarré BN , & de la droite BP , est égal aux produits semblablement tirez, la figure $BADFEGH$ prolongée à l'infini qui en ce cas est égale

au parallélogramme B I, n'a pourtant aucun centre de gravité. Mais si le produit, par exemple, du cube B N & de la droite B P est égal aux produits semblables & semblablement tirez, en ce cas non seulement l'espace de la figure prolongée à l'infini, est égal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallélogramme B I, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne P F coupée en telle sorte au point O, que la ligne P O soit égale à la ligne K P. Et ce point O sera ledit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monsieur Uvallis veut avoir la démonstration de cette proposition & de la règle générale pour trouver lesdits centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans sondit traité, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se déduit par comparaison en Geometrie n'est pas toujours véritable.

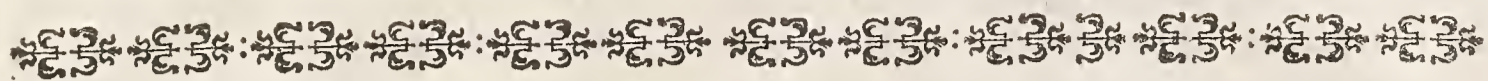
Je ne vous parle ny de vôtre livre, ny de celui de Thomas Anglus, *ne sutor ultra crepidam*. Vous êtes souverain en Physique, & je vous reconnois pour tel. J'espère pourtant au premier voyage de vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente naturelle, dequoy vous avés traité dans vôtre Livre que Monsieur Borel m'a fait la faveur de me faire voir. Je suis, &c.



Problema propositum à D. de Fermat.

Quæstiones purè Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hætenus tractata Geometricè potius quam Arithmetice? Id sane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipse Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietæ; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter dumtaxat in elementis adumbratam, ab ijs autem qui secuti sunt, non satis exultam, (nisi forte in ijs Diophanti libris, quos injuria temporis abstulit, delitescat,) aut promoveri studeant *Ἀριθμητικῶν Παῖδες*, aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema seu Problema sequens, aut demonstrandum aut construendum proponimus. Hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adscitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3. numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adscitâ unitate, conficit 4, qui est quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adscitâ unitate, facit 49, qui est quadratus. Et loco 1 & 16, possunt alij infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquiremus. Quærat, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c. adscitâ unitate conficiat quadratum.

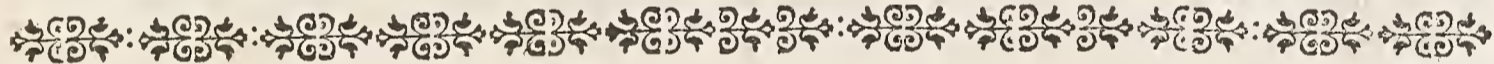


*Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier
Kenelme Digby.*

Du 20. Juin 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu vôtres dernière lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de réponse. Vos deux lettres *Angloises* m'ont esté traduites par un jeune *Anglois*, qui est en cette ville, & qui n'a point connoissance de ces matieres; de sorte que sa traduction s'est trouvée si peu intelligible, que je n'y ay peu decouvrir aucun sens réglé; & ainsi je ne puis vous resoudre, si ce Mylord à satisfait à mes questions, ou non. Il me semble pourtant au travers de l'obscurité de cette traduction bourruë, que l'Autheur des lettres à trouvé mes questions un peu trop aisées; ce qui me fait croire, qu'il ne les a pas résolues. Et par ce qu'il pourroit equivoquer sur le sens de mes propositions, j'ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjointé à toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré. J'ay donné par exemple 343, qui est cube, & aussi nombre entier, lequel adjointé à toutes ses parties aliquotes fait 400, qui est un nombre quarré. Et par ce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joint à toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré; Et si le Mylord Brouncker répond, qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343. qui satisfasse à la question, je vous promets, & à luy aussi, de le desabuser en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joint à toutes ses parties aliquotes fasse un cube. Pour la question proposée dans l'écrit Latin, que je vous envoyay, elle est aussi en nombres entiers. Et partant les resolutions en fractions (lesquelles peuvent être d'abord fournies à *quolibet de trivio Arithmetico*) ne me satisferoient pas. Je suis, &c.



*Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier
Kenelme Digby.*

Du 15. Aoust 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu avec joye & satisfaction vôtres dernier paquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vôtres convalescence, & du retour de vôtres santé, c'est un bien si grand, & si considerable pour tous ceux qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monsieur Uvallis, que j'estime comme je dois, & j'advoüe, que ses figures sont les memes que les miennes; & que ses conclusions pour leur quadrature sont aussi les memes; mais sa façon de demonstres, qui est fondée sur induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimede, fera quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes demonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve, mais

toutes ses propositions pouvant être démontrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedaâ* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient son livre, je ne sçay pas, pourquoy il a préféré cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui est & plus convainquante, & plus elegante, ainsi que j'espere luy faire voir à mon premier loisir. Je voudrois qu'ensuite il eût déterminé les centres de gravité de ces hyperboles infinies en distinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas: car tandis qu'il dira, que la chose luy est connue, & qu'il n'en a pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas: Et d'autant plus, que la proposition generale sans demonstration me suffira de sa part; Et je vous réponds à l'avance, qu'elle ne sçauroit contenir plus de huit, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy fairay part de ma speculation sur ce sujet, & de ma façon de démonstrer.

Pour les questions des nombres, j'ose vous dire avec respect & sans rien rabatre de la haute opinion que j'ay de vôtre Nation, que les deux lettres de Mylord Brounker, quoy qu'obscures à mon égard & mal traduites, n'en contiennent aucune solution. Ce n'est pas que je pretende par là renouveler les joûtes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les François. Mais sans sortir de la Metaphore, j'ose vous soustenir, & à vous, Monsieur, plus justement qu'à tout autre, qui excellez aux deux mestiers, que le hazard, & le bon-heur se mêlent quelquefois aux combats de science aussi bien qu'aux autres, & qu'en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus*. Je seray pourtant ravy d'être détrompé par cét ingénieur & sçavant Seigneur, & pour luy témoigner, que nôtre combat ne sera point à outrance, je me relâche dans la question suivante, que je m'en vay luy proposer, de la rigueur de mes premieres questions, qui ne vouloient que des nombres entiers: il me suffira, qu'ils soient rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Auteur me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse, qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cét Auteur, qui contienne tous les treize livres, & de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle question ou pour Mylord Brounker, ou pour Monsieur Uvallis, que j'écris en Latin suivant vôtre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantum exequutus est Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in ijs saltem libris, qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ, proponatur numerus 28. ex duobus Cubis 1. & 27. compositus, oportet dictum numerum 28. in duos alios Cubos rationales dividere, & propositionis solutionem generaliter præstare.

Je consens, que Monsieur Frenicle l'entreprenne, je suis persuadé, qu'il ne la trouvera pas si aisée, que les autres, que je sçavois être de sa juridiction. Je l'estime extraordinairement aussi bien que vous, mais pourtant ce que je m'en vay adjoûter, l'étonnera, si vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois écrit, qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers, qui joint au binaire fasse un cube, & que ledit quarré est 25. auquel si vous adjoûtés 2. il se fait 27. qui est cube. Il a peine à croire cette proposition negative, & la trouve trop hardie & trop generale. Mais pour augmenter son étonnement, je dis que si on cherche un quarré, qui adjoûté à 4. fasse un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, sçavoir 4. & 121. car 4. adjoûté à 4. fait 8. qui est cube: & 121. adjoûté à 4. fait 125. qui est aussi cube: mais après cela toute l'infinité des nombres n'en sçauroit fournir un troisiéme, qui ait la même propriété.

Je ne sçay ce que diront vos Anglois de ces propositions negatives, & s'ils les trouveront trop hardies. J'attens leur resolution, & celle de Monsieur Frenicle, qui n'a point répondu à une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part; dequoy je suis surpris, car je luy répondois exactement à tous ses doûtes, & luy faisois quelque question de mon chef, dont j'attends la solution. Je suis, &c.

J'oublois

sent le Cylindre circonscrit ; si on n'a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raison, qu'il y a entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu'on peut concevoir en la Sphere (lesquels Diametres pris tous ensemble, ne font autre chose, qu'un Cercle) & ceux des Cercles, qu'on peut feindre au Cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit Cercle) cela n'est autre chose, que de demander la raison du Cercle au quarré circonscrit.

2. En la même Epître après avoir posé une suite de nombres, sçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit être mis entre 1. & 6. Je responds, que si on a égard à la suite entiere desdits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre lesdits 1. & 6. pource qu'en cette suite les nombres ne font pas une proportion continuë ; mais en autant de façons, que l'un est comparé à l'autre, autant font ils de proportions differentes, de sorte que ce sont plusieurs proportions, ou progressions disjointes, & ainsi quand on prendroit un terme moyen entre 1. & 6. il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer en ces nombres, consiste au raport qu'ont entr'eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, auxquels on voit une espece de progression Arithmetique ; neantmoins ne sçauroit passer aux nombres susdits, en telle sorte que par iceluy on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite : au contraire la propriété même de cette progression fait, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. sont produits par les suivans en multipliant, 1. $4 \cdot \frac{2}{1}$ $4 \cdot \frac{2}{2}$ $4 \cdot \frac{2}{3}$ $4 \cdot \frac{2}{4}$ ou les equivalents 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile à voir où est le raport: Il consiste aux premiers, en la seule augmentation du denominateur de la fraction, qui y est jointe, ce qui fait diminuer les nombres d'autant plus, qu'ils s'éloignent du premier terme, sçavoir de 1. & aux 2^{mes}. 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ &c. (qui sont les mêmes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4. & les denominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres, tant plus la progression avance ; en sorte que celui qui est le plus proche du premier terme 1. sçavoir $4 \cdot \frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ qui vaut 6. est le plus grand de tous.

Il faut au ssi remarquer, que le raport des nombres de ladite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1. ou plutôt ne commence pas dès le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne ; De sorte que si on vouloit augmenter les termes de ladite progression, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le premier & le second terme, sçavoir entre 1. & $4 \cdot \frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ il ne faudroit pas avoir égard à 1. mais aux autres nombres $4 \cdot \frac{2}{1}$ $4 \cdot \frac{2}{2}$ $4 \cdot \frac{2}{3}$ $4 \cdot \frac{2}{4}$ ou à ces autres qui sont les mêmes $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$ car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1. qui n'a rien de commun avec les nombres de ladite progression ; mais aux autres seulement, & qu'ils augmentent à mesure, qu'ils approchent du premier terme 1. il s'ensuit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1. & $4 \cdot \frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ seroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1}$ ou 6. & il faudroit multiplier le premier terme 1. par ce nombre moyen, qui seroit plus grand que 6. pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnez, qui sont 1. & 6. (car lesdits nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaison, que celle, qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune) & ainsi on auroit un nombre plus grand que 6. pour le moyen terme d'entre 1. & 6. ce qui est absurde.

De là s'ensuit, qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1. & 6. en tant qu'ils sont

compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer de là, que la ligne courbe VC , n'est point égale en elle même, & qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu, qui soit égal ou réglé; mais de plusieurs differens, suivant ses parties; & que c'est une ligne composée de proportions de plusieurs courbes comprises entre les paralleles à l'axe VX de la figure: car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la premiere & la seconde paralleles, sçavoir entre 1. & 6. soit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne seroit de differente longueur suivant la nature & la propriété de cette portion de la courbe VC , qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a esté dit; elle n'auroit raport qu'avec les 2. termès, 1. 6. & non pas avec les autres, n'y avec les moyennes, qu'on auroit tirées entre-deux, si on prenoit le tout conjointement.

3. En la premiere proposition ledit sieur Uvallis propose une suite de quantités commenceans par o , (qui represente le point) & qui se suivent en progression Arithmetique; & cherche quelle raison il y a entre la somme desdites quantitez, & la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison, est de prendre les sommes de diverses quantitez de nombres commenceans par les moindres; puis comparer les raisons les unes aux autres, & inferer de la une proposition universelle.

On se pouvoit servir de cette methode, si la demonstration de ce qui est proposé étoit bien cachée; & qu'aparavant de s'engager à la chercher on se voulut assurer à peu près de la verité: mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte, & on y doit apporter les precautions necessaires; car on pourroit proposer telle chose & prendre telle regle pour la trouver, qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers, & neantmoins seroit fautive en effect, & non universelle; de sorte qu'il faut être fort circonspect pour s'en servir; quoy qu'en y apportant la diligence requise elle puisse être fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura deduit; comme fait le sieur Uvallis; car pour cela on ne se doit contenter de rien moins, que d'une demonstration, & principalement au sujet de la proposition, dont il s'agit; dont la solution & demonstration est fort facile.

Voicy comme on demonstrera que lesdites quantitez proposées, étans jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantitez égales à la plus grande d'icelles.

Soient exposées des quantités ou nombres, qui commencent par le point, ou par a , & qui se suivent en progression Arithmetique, & soient celles de la premiere ligne.

1. $o. a. b. c. d.$ Quantités données.

2. $d. d. d. d. d.$ Quantités égales à la plus grande des données.

3. $d. c. b. a. o.$ Excès des plus grandes par dessus les données.

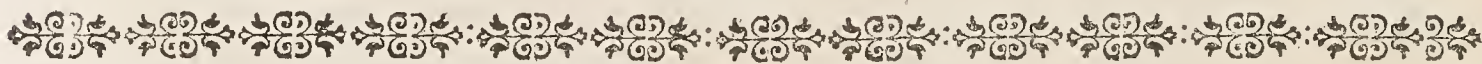
Puisque les quantités données sont en progression Arithmetique, le troisième terme b , surpassera le second de pareille quantité, que le second (sçavoir a) surpassé le premier qui est o ; mais l'excès de a par dessus o est a ; & partant toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche, selon la quantité du second terme a . Et si on prend les quantités de 2. en 2. laissant une d'icelles entre-deux, comme sont a, c , ou b, d , de la premiere ligne; leur difference sera le troisième terme, comme il est evident: & de même si on les prenoit de 3. en 3. elles auroient le quatrième terme c , pour leur difference.

De là il s'ensuit, que si on prend autant de termes égaux au plus grand terme d , des quantités données, comme en la seconde ligne; leur excès par dessus les quantitez données sera égal ausdites quantités données; comme on voit en la troisième ligne. Car l'excez de d , par dessus la plus grande des quantitez données, sçavoir par dessus d , est o , qui est le premier terme des quantitez données; l'excez du même d , par dessus le terme precedent c , est le second terme a , comme il a esté monstré; sçavoir pource que les 2. quantitez c & d , sont prochaines; & ensuite l'excez du d , par dessus b , sera b , & ainsi des

autres; jusques à ce, qu'enfin étant au premier terme o , l'excez de d , par dessus iceluy fera le même d : & ainsi la ligne des excez, qui est la troisième, sera égale à la première qui contient les quantitez données. Mais la première & la troisième ligne étant jointes ensemble; sçavoir les quantitez données, étant jointes aux excez des quantitez de la seconde ligne par dessus celles de la première, qui sont les données, font ladite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la première, partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données, pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la première ligne, c'est à dire des quantitez données. Ce qu'il falloit démontrer.

4. En la seconde proposition il requiert, que le premier terme soit o , & le second 1 ; autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis, que si on commence par o , quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toujours double des quantitez données; car si pour a, b, c, d ; on prend quelques nombres, qu'on voudra, qui soient en progression Arithmétique depuis le premier terme o , cela succedera toujours en la même sorte, ainsi qu'il a esté cy-devant démontré.



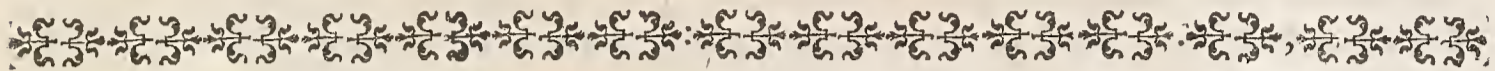
Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 5. Decembre 1657.

MONSIEUR;

Je me donnay l'honneur de vous écrire le 19. du mois passé, depuis ce temps là j'ay esté en Normandie, & à mon retour j'ay trouvé la Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 17. du même mois, dont je vous rends tres-humbles graces, & m'estime tres-heureux de vous servir dans le commerce qui est entre vous & Monsieur de Frenicle, à qui je monstray aussi vôtre Lettre, & comme vous y parlez de nôtre Chancelier Bacon, cela me fit souvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma presence une fois à feu Monsieur le Duc de Bouquingam. C'étoit au commencement de ses malheurs, quand l'Assemblée des Estats, que nous appellons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit en suite: ce jour là il en eût la première alarme. J'étois avec le Duc ayant dîné avec luy, le Chancelier survint, & l'entretint de l'accusation qu'un de ceux de la Chambre Basse avoit présentée contre luy, & il supplia le Duc d'employer son credit auprès du Roy pour le maintenir toujours dans son esprit: le Duc luy répondit qu'il étoit si bien avec le Roy leur Maître qu'il n'étoit pas besoin de luy rendre de bons offices auprès de Sa Majesté; ce qu'il disoit, non pas pour le refuser, car il l'aymoit beaucoup, mais pour luy faire plus d'honneur; le Chancelier luy répondit de tres-bonne grace, qu'en effet il croyoit être parfaitement bien dans l'esprit de son Maître, mais aussi qu'il avoit toujours remarqué que pour si grand que soit un feu, & pour si fortement qu'il brûle de luy même, il ne laissera pourtant pas de brûler mieux & d'être plus beau & plus clair si on le souffle comme il faut; de même j'ay dit à Monsieur Frenicle que pour si grand feu d'esprit qu'il ait, & quelque merveilleux que soit son genie pour la science des nombres, son feu seroit plus brillant s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'estude, par la lecture des Anciens & par la conversation. Il vous honnore infiniment, & dit que jamais homme n'a approché de vôtre fond de science, il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer, je l'ay fait copier par mon Secretaire, car vous ne l'aurez peu lire, il écrit d'ordinaire sur de lambeaux de papier, & si vite

qu'il n'y a que luy même qui puisse lire son écriture. Vous aurés veu par ma dernière Lettre que j'ay receu celle que vous me fites l'honneur de m'écrire lors que vous estiés à la campagne. Au lieu de vous laisser passer le titre de paresseux que vous vous donnez injustement, j'admire infiniment la facilité & la presence avec laquelle au milieu de vos grandes occupations vous exprimez sur le champ vos profondes & subtiles pensées. Je vous supplie de croire que j'honore vos rares talens, & que je voudrois que mes actions vous peussent témoigner mieux que mes paroles à quel point je suis, &c.

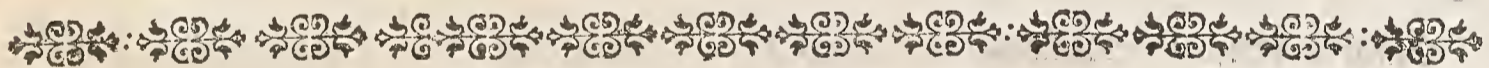


Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 12. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Depuis que je me suis donné l'honneur de vous écrire une Lettre du 5. de ce mois, je receus celle que vous m'avez fait la faveur de m'écrire du 25. du passé, dont je vous rends tres-humbles graces; elle me fut renduë comme j'étois à table avec Monsieur Frenicle à qui je la montray, & y ayant papier & ancre sur le buffet, je le priay de vous écrire quelque petit mot sur ce que vous y disiez sur son sujet, je vous envoie son écrit: il me fait souvenir fort souvent d'un Aumônier qu'avoit le feu Roy d'Angleterre, qui étoit un des plus Eloquens Predicateurs de son temps, & tres-subtil Theologien: mais depuis que la guerre fut commencée il n'y avoit plus moyen de le faire prêcher ou parler de sa science, il n'avoit d'autres idées en son imagination que de machines de guerre & des stratagemes pour prendre des Villes, en quoy il n'entendoit rien du tout: ainsi Monsieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre chose que de la Theologie Mystique & de ses pensées sur le Franc-arbitre, ou sur la predestination, quittant le rang qu'il pourroit posséder d'un des plus grands Mathematiciens du siecle pour un des moindres Theologiens: car c'est bien tard de commencer la Physique & la Theologie après l'âge de cinquante ans, je dis la Physique, parce qu'il est mal-aisé d'être un grand Theologien si on n'est un solide Physicien, & si on n'a une véritable connoissance de la nature dont le sommet sert de base à la grace. Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entens aussi peu & encore moins que luy, je reviens à ce que je sçay de science certaine, dont je vous feray demonstration evidente toutes les fois que l'occasion s'en presentera, & c'est que je suis, &c.



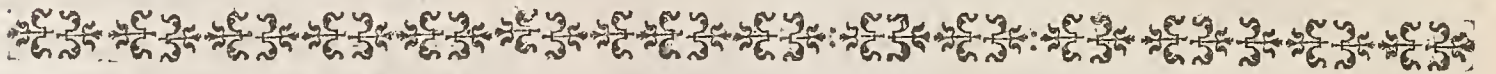
Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 13. Fevrier 1658.

MONSIEUR,

Je suis sur le point d'entrer en carrosse pour aller à Roüen, dont je ne croy pas revenir de 15. jours ou trois semaines, c'est pourquoy dès que j'eus receu vôtre paquet du 27. du passé j'allay chez Monsieur Clerfelier, & n'y ayant pas moyen de luy faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je creus que vous trouveriez bon que je les luy confiassé sur la parole qu'il me donna de vous les rendre fidelement dès qu'il auroit tiré copie de ce qu'il luy faut: c'est un fort honnête homme,

& fort vôtre serviteur, il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire, par cet Ordinaire. Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois icy je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer, elle est trop pesante pour ma foiblesse, je sçay trop bien, *quid ferre recusent, quid valeant humeri*, pour pouvoir être Arbitre entre deux Grands Personnages il faut aller du pair avec eux; Crassus s'aquitta bien mal de cette fonction entre Cæsar & Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux. Il est vray que ceux qui sont dans les valées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration. Mais pour bien juger de ce qu'il y'a au sommet de quelqu'une d'elles il faut être monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon, *non nostrum inter vos tantas componere lites*, Et pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur, & Monsieur Descartes avés soutenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien oster ou changer, pourveu qu'il n'y ait rien qui soit offenceant, ce qu'on ne peut presumer de deux aussi grands hommes, & à quoy Monsieur Clerfelier prendra garde. Car de vouloir étouffer ce petit feu brillant & étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grace & de la force à une contestation d'esprit & de science, & c'est une des raisons pourquoy les disputes aux Universitez des Suisses sont si peu agreables, leur maniere d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des Bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec vehemence & avec chaleur; car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumiere & la vie comme celle du Soleil. Je ne sçaurois m'empêcher de vous envoyer quelques Vers que le plus grand genie de nôtre Isle pour les Muses écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand amy, & que vous témoignez être fort le vôtre en le citant souvent. Je vous diray comment je les ay rappelés en ma memoire: l'autre jour m'entretenant avec une personne de grand merite de vos rares qualitez, je luy recitay ces vers y mettant vôtre nom au lieu de celui de Baco, il en voulut avoir une copie, je la luy fis transcrire par mon Secretaire sur le broüillard que j'en fis à la hâte, il vous en auroit fait aussi une copie s'il eût esté chez moy, mais je viens de l'envoyer chez Monsieur l'Ambassadeur d'Angleterre. Je suis, &c.



Lettera del Signor Digby al Signor Di Fermat.

Di 15. Maggio 1658.

ILL.MO SIG. PADRON COL.MO.

Haurei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4. del corrente, non m'havesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù ò più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; Havendo imparato dal sàvio, che come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silentio; & dallo spiritoso Poëta Thosco, che

*Il silentio ancor svole
Haver prieghi e parole.*

Ma lei havendomi fatto l'honore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese, non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringratiarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per auvezzarsi così alla nostra rozza favella; rozza in quant'al suono, & ingrata all'orechia non auvezza a essa; ma forse, quanto alla copia, proprietà, & energia dell'espressioni, & all'eleganza e politezza in ogni altro genere; che non cede punto alle più eleganti e stimate, ne delle volgari, ne delle dotte, che habbino mai ha-

vuto pratica nel mondo, e che nelle poësie che habbiamo, non solo va del pari, ma auvanza di gran lunga li migliori ò Toscani, ò Latini, ò Greci; eccettuando però nell'Heroica Homero & Virgilio, i quali doi, senza contrasto, son fuori d'ogni comparatione con tutti de i secoli dopo loro, e però, prudentemente fece quel Grammatico ardito Giuglio Scaligero (che maggior epitheto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico) che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti,

Penitus toto divisos orbe Britannos.

Poiche habbiamo parecchie compositioni Poëtiche lequali meritarebbono la luce & il godimento universale, e per lequali capire, ho conosciuto 4. persone di spiriti sublimi & ingegnossimi (doi Francesi, e doi Italiani) che per haver visto delle grossieri interpretationi in prosa di certi carmi Inglese, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per beber alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato haver gli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. J. ho messo in mano del Messaggiero di Tolosa Lunedì passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne haveva piu copia apresso di me, havendo per cio scritto in Inghilterra, doue è stato ristampato questo trattato tre ò quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia: e poi che lei si uole penare di dar un' occhiata à questo mio componimento, mi rallegrò molto che cio sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo: Per esser che quantunque il traduttore sia stato huomo dottissimo, e la sua traduttione esaminata per tutto il Collegio de i Dottori Inglese di questa Città tutti valenti Theologi quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarij, nientedimeno, egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original & il trascritto, inquanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo haver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continuamente co'l Bacono, il Seldeno e altri maggiori lumi della nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuisse lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo discorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza cio che voleva dire, essendo che lo feci nello spatio di quelli quasi doi anni ch'io fui continuamente su'l mare: durante il quale, è ben vero che quasi ogni giorno hebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole, con chi hauevamo allora guerra, e anche dalle Vineziane) nientedimeno mi avuanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorche il comando del Rè fù il mio primo motivo) mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, dimodo che posso con ragione dire come quel più dotto & gentil cavagliero di tutta la nation Castigliana, e Prencipe de' loro Poëti Garcilasso de la Vega,

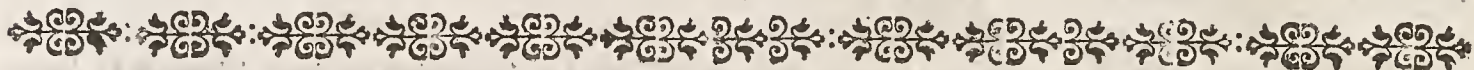
Entre las armas del sangriento Marte

Hurtè del tiempo esta breve suma,

Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticivolo che ho composto intorno all'infalibilità della Religione Catholica per dar sodisfatione a un' de' maggiori genij ch'io habbia mai conosciuto, e che finalmente l'ha convinto. Perche lui non si contentava di considerer Iddio come un Legislatore, che volesse dimonstrare il suo potere con dar premij ò pene secondo una volontà imperiosa senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia della Religione, e perche essa sia necessaria a gl'huomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Here tici che sia mai stata) nel che

fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una strada non calcata d'altri, & tutte le piu squisite espressioni che sò della lingua nostra, & non ne feci stampare se non 30. copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Inglese, che ha fatto gran romore in Inghilterra & che molti vogliono attribuire a me, ancor che sia sotto il nome del Signor Bianchi (conosciuto sotto titolo di Thomas Anglus) per esser che i sentimenti dell'Autor & li miei siano precisamente gl'istessi. Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, & la riverisco, &c.



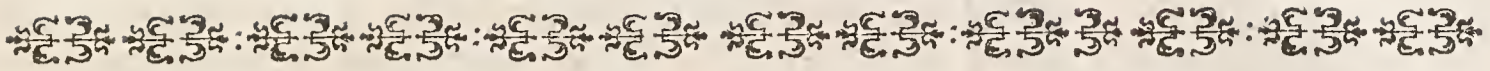
Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

De Bienassis le 10. Aoust 1660.

MONSIEUR,

Vous êtes le plus galand homme du monde, & je suis assurément un de ceux qui sçay le mieux reconnoître ces qualitez là & les admirer infiniment, sur tout quand elles sont jointes aux talens qui se trouvent singulierement en vous; tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoissance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aye encore d'écrire & de lire moy même: mais l'honneur que vous me faites m'est si cher que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous diray donc, Monsieur, que si j'étois en santé je serois volé à Tolose, & que je n'aurois pas souffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moy. Je vous diray aussi que quoy que vous soyez celuy de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand Geometre, ce ne seroit pas cette qualité là qui m'auroit attiré. Mais que je me figure tant d'esprit & d'honêteté en vôtre conversation que c'est pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la Geometrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit, mais en même temps je la connois pour si inutile que je fais peu de difference entre un homme qui n'est que Geometre, & un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'est qu'un métier; & j'ay dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essay, mais non pas l'employ de nôtre force: de sorte que je ne ferois pas deux pas pour la Geometrie, & je m'assure que vous êtes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant cecy de plus en moy que je suis dans des études si éloignées de cét esprit là, qu'à peine me souviens je qu'il y en ayt. Je m'y étois mis il y a un an ou deux par une raison tout a fait singuliere, à laquelle ayant satisfait je suis en hazard de n'y plus penser jamais, outre que ma santé n'est pas encore assez forte, car je suis si foible que je ne puis marcher sans baston, ny me tenir à cheval. Je ne puis même faire que trois ou quatre lieües au plus en carrosse, c'est ainsi que je suis venu de Paris icy en vingt-deux jours: les Medecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de Septembre, & je suis engagé autant que je puis l'être depuis deux mois d'aller de là en Poitou par eau jusqu'à Saumur pour demeurer jusqu'à Noël avec Monsieur le Duc de Roanes Gouverneur de Poitou, qui a pour moy des sentimens que je ne vaus pas. Mais comme je passeray par Orleans en allant à Saumur par la riviere, si ma santé ne me permet pas de passer outre, j'iray de là à Paris; Voilà, Monsieur, tout l'état de ma vie presente, dont je suis obligé de vous rendre compte, pour vous assurer de l'impossibilité où je suis de recevoir l'honneur que vous daignez m'offrir, & que je souhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître ou en vous ou en Messieurs vos enfans, auxquels je suis tout devoüé, ayant une veneration particuliere pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je suis, &c.

Clarissimo



VIRO CLARISSIMO DOM. GASSENDO*

Petrus de Fermat, S. P.

De proportione quâ gravia decidentia accelerantur.

PRonuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum esse eum, qui à quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.

Eum verò qui æqualibus spatijs æqualia celeritatis momenta sibi superaddit, adeo non convenire motui gravium descendentium affirmat, ut ex eo supposito motum in instanti fieri deducat, & ut sibi persuasit, facillimè demonstrat.

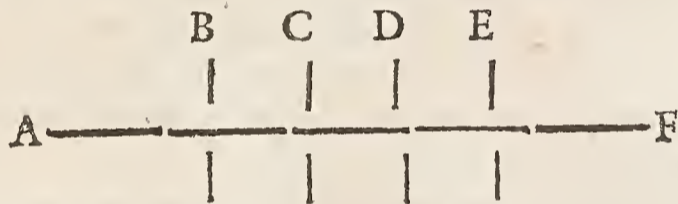
Sed concedatur, si placet, viro perspicaci & Lynceo indemonstrata conclusio dummodo sit vera. Demonstrationem enim dum primo statim obtutu,

Aut videt, aut vidisse putat per nubila,

Nihil mirum si lectoribus minus utique Lynceis parum videatur satisfecisse.

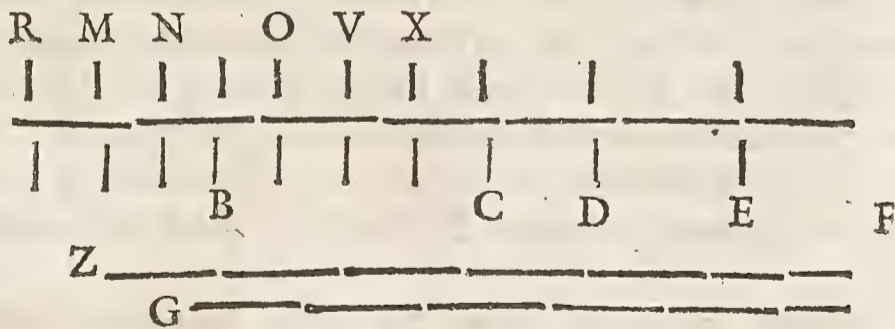
Ut igitur constet suus honor Galileo, neque amplius de ipsius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus disputetur, propositionem ipsam more Archimedæo hîc demonstratam habebis.

Si quotlibet rectæ ad unum punctum concurrentes exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione, verbi gratiâ,



Sint rectæ AF, BF, CF, DF, EF, &c. in continua proportione, erunt intervalla ipsarum AB, BC, CD, DE in eadem ratione. Est enim ut tota AF ad totam BF ita ablata BF, à priori ad CF ablatam à posteriore. Ergo ita reliqua AB ad reliquam BC, ut tota ad totam, hoc est, ut AF ad BF, & sic de cæteris. Eâdem ratione demonstrabimus ut AF, ad CF, ita esse AB ad CD, & ut BF, ad DF, ita esse BC, ad DE, &c.

Si intelligatur motus à puncto F versus punctum A continuè acceleratus secundum rationem decursum spatiorum & exponantur quotlibet continuè proportionales ut AF, BF, EF, &c. tempus in quo mobile percurreret spatium DE, erit æquale tempori, in quo idem mobile percurreret spatium DC, denique spatia omnia ED, DC, CB, eodem tempore singula percurrerentur,



Demonstrabimus primò spatia CB, BA, eodem tempore in supposito motu percurreri.

Si enim tempus per AB, non est æquale tempori per BC, erit vel majus, vel minus. Sit primùm majus si fieri potest. Ergo tempus per AB, est ad tempus per BC, ut aliqua recta major ipsa BF, ad ipsam BF: sit recta illa Z. Ergo est ut tempus per AB, ad

* Hæc epistola Typis edita fuit tomo 6. operum Gassendi inter epistolas ad eum scriptas.

tempus per BC ita recta Z ad rectam BF , sumantur inter rectas NF , BF , tot mediarum in continua proportione, ut RF , MF , NF , donec minor ex ipsis ut AF , sit minor quam recta Z , quod quidem necessario eventurum vel ex sola mediarum inventionem, ejusque iterationem, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF , RF , MF , NF , BF , cum autem sit ut AF , ad BF , ita BF , ad CF , & ita AB , ad BC , ergo poterit continuari proportio sub eodem numero terminorum, ut sint etiam proportionales BF , OF , VF , XF , CF , idque in eadem superiorum ratione.

His ita positis & constructis considerentur & comparentur singula spatia AR , RM , MN , NB , singulis spatijs BO , OV , VX , XC , singula nempe singulis, hoc est spatium AR , spatio BO : si igitur per spatium AR , fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquisitum, tempus per AR , ad tempus per BO , componeretur ex ratione spatij AR , ad spatium BO , & vicissim ex ratione velocitatis per B , ad velocitatem per R , quod notissimum est, & Galileus ipse demonstravit propositione quintâ tractatus de motu æquabili.

At ut spatium AR , ad spatium BO , ita per primam propositionem recta AF , ad rectam BF , & ut velocitas per B , ad velocitatem per R , ita ex supposita motus accelerati juxta spatia decursa definitione, recta BF ad rectam RF , ergo tempus per AR , hoc casu ad tempus per BO , componeretur ex ratione AF , ad BF , & ex ratione BF , ad RF , esset igitur motus per AR , ad motum per BO , ut recta AF , ad rectam RF : deinde si per spatium RM , fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis in O acquisitum, eadem ratione probabitur motum per RM , ad motum per OV , esse ut recta RF , ad rectam MF : similiter considerando velocitates punctorum N , & V , erit tempus per MN , ad tempus per VX , ut MF , ad MF : denique considerando velocitates punctorum B , & X , in ultimis spatijs erit tempus per RB , ad tempus per XE , ut NF , ad BF , sed omnes ejusmodi rationes nempe AR , ad RF , RF , ad MF , MF ad NF , NF , ad BF , ex constructione sunt eadem.

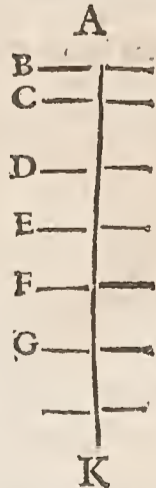
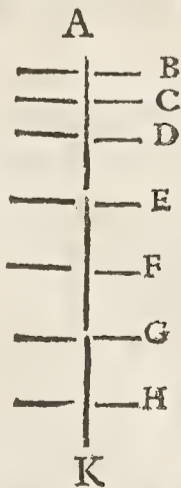
Ergo tempus omnium motuum per totam AB , ad tempus omnium motuum per totam BC , in utrisque spatijs, ita ut diximus, consideratorum est ut recta AF , ad RF , sive NF , ad BF , sed tempus motus accelerati per AR , est minus tempore motus per AR uniformis juxta velocitatem in R , cum enim à puncto R , usque ad punctum A , perpetuò ex hypothese velocitas crescat, ergo à puncto R , ad punctum A , citius per motum acceleratum pervenitur, quam si velocitas acquisita in R , eadem & uniformis usque ad punctum A , perseveraret. Eadem ratione probabitur tempus motus accelerati per RM esse minus tempore motus uniformis per RM , si velocitas ipsius ultimo ipsius spatij M puncto respondeat. Denique constat motum per totam AB , acceleratum, ut fiet hypothesis, minori tempore fieri quam motum alium fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates ultimis spatiorum AR , RM , MN , NB , punctis respondentes compositum, at contra tempus motus accelerati per BO , est majus tempore motus uniformis per BO , considerati juxta velocitatem puncti B , quia velocitas à puncto B , ad O , semper crescit in motu accelerato, juxta hypotesin, & minor semper est velocitate, quæ respondet puncto B : unde pari ratiocinio concludetur motum per totam BC , acceleratum, ut fiet hypothesis, majori tempore fieri, quam motum illum fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates primis spatiorum BO , OV , VX , XC , punctis respondentes compositum.

Cum ergo tempus motus accelerati per AB , sit minus tempore motus illius fictitij per eandem AB , & contra tempus motus accelerati per BC , sit majus tempore motus illius fictitij per eandem BC , ergo minor est ratio temporis motus accelerati per AB , ad tempus motus accelerati per BC , quam temporis motus fictitij per AB , ad tempus motus fictitij per BC : sed ut tempus motus accelerati per AB , ad tempus motus accelerati per BC , ita posuimus esse rectam Z ad rectam BF , & ut tempus

motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita demonstravimus esse N F, ad B F, ergo minor est ratio rectæ Z ad rectam B F, quàm rectæ N F, ad eandem B F, quod est absurdum, cum recta Z sit major recta N F.

Ergo tempus motus accelerati per A B, non est majus tempore motus accelerati per B C. Eâdem facilitate probabimus tempus motus per A B, accelerati non esse minus tempore motus accelerati per B C: sit enim minus, si fieri potest, erit igitur ut tempus motus per A B, accelerati ad tempus motus accelerati per B C, ita recta minor ipsa B F, ad ipsam B F, esto itaque recta illa minor quam B F G, & sit tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, ut G, ad rectam B F, & inter rectas B F, C F, exponatur continuè proportionalium series quarum maxima O F, sit major quàm G. Eodem quo usi sumus in superiori demonstrationis parte ratiocinio conferendo spatia in ipsa B, inter similes proportionales intercepta, cum spatijs B O, O V, V X, X C, mutemus solummodo velocitates uniformes, & fingamus verbi gratiâ motum per A R, uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ, motum verò uniformem per B O, fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto, O & sic in reliquis spatijs in quibus patet omnes velocitates per A B, uniformes augeri, velocitates verò per B C, uniformes minui, contrà id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum. Concludetur ut supra tempus motus hujusmodi uniformis per A R, ad tempus motus uniformis per B O, esse ut recta R F, ad rectam A F, dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur: similiter tempus motus uniformis per R M, ad tempus motus uniformis per O V, erit ut M F, ad M R: denique tempus motus fictitij illius per A B, ex uniformibus compositi ad tempus motus fictitij per B C, ex uniformibus pariter compositi erit ut R F, ad A F, cum omnes rationes sint eadem, hoc est ut O F, ad B F, per primam propositionem.

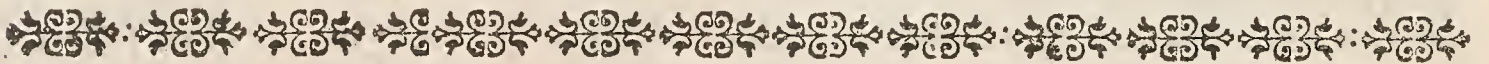
Tempus autem motus accelerati per A B, est majus tempore motus illius fictitij ex uniformibus compositi, cum supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirum in hoc casu primis spatiorum A R, R M, &c. punctis respondent; sed & tempus motus accelerati per B C, est minus tempore motus fictitij ex uniformibus compositi, quia hîc velocitates minuuntur, & ultimis spatiorum B O, O V, &c. punctis respondent. Ergo major est ratio temporis motus accelerati per B C, quàm temporis motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C: sed ut tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C; ita est recta G, ad rectam B F, ex suppositione: ut autem tempus motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita recta O F, ad B F, ex demonstratione; ergo recta G, ad rectam B F, majorem proportionem habet, quàm recta O F, ad rectam B F, quod est absurdum, cum recta G, sit minor rectâ O F, ex constructione: non ergo tempus motus accelerati per A B, est minus tempore motus accelerati per B C, sed nec majus ut supra demonstratum est, ergo est æquale. Eadem ratione patet tempus motus accelerati per C D, æquari tempori motus accelerati per A B, & tempori motus accelerati per B C, & continuatis, si placet, in infinitum rationibus, omnia omninò spatia eodem tempore percurri.



His positis tertiâ propositione mentem Galilei revelamus, aut propositionis Verita-

tem asseruimus. Intelligatur motus gravium descendendum à quiete ex puncto A usque ad punctum H, verbi gratia, & supponatur, si fieri potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A, usque ad H, tempore unius minuti, aut altero quovis tempore determinato, & supponatur motus continuari usque ad punctum K, a quo motum per HK, fieri in instanti. Si enim motus per HK, non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod per aliquem numerum multiplicatum excedet tempus in decursu spatij AH insumptum. Ponatur numerus multiplicans 5. ita ut tempus motus per HK, quinquies sumptum excedat tempus motus per AH, rectis KA, HA, sumatur tertia proportionalis GA, & toties continuetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum quinque: fiant ergo ex proportionalibus continuatis sex, verbi gratia, spatia ultra punctum H, quæ sint HG, GF, FE, ED, DE, CB, ergo tempus motus per HG, per præcedentem est æquale tempori motus per HK, similiter tempus motus per GF, est æquale tempori motus per HK. Denique motus per totam HB, fiet in tempore quod ad tempus per HK, erit sextuplum. At tempus temporis per HK, quintuplum est majus tempore motus per AH, ergo à fortiori tempus motus per HB, tempore motus per totam HA, est majus, quod est absurdum. Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstravit.

Hæc breviter & familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi imposterum faceat negotium aut Casæus, aut quivis alius Galilei adversarius, & in immensum excrescant volumina, quæ unicâ demonstratione, vel fatentibus ipsis authoribus aut destruentur, aut inutilia & superflua efficientur. Vale.



*Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de *****

MONSIEUR,

Il y a déjà quelque temps que Monsieur le President de Donneville s'étant donné la peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroissement de vitesse qui est en la chute des corps, & parce que je n'ay point eu l'honneur de le revoir depuis, & que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, & que d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre après qu'il me l'auroit montré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre, avec les tres-humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire, combien j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, &c.

*Lettera del Signor Benedetto Castelli Abbate di Verona,
al Signor di *****

ILL.^{MO} ED ECC.^{MO} SIG.^{RE}

Ho Letti i pensieri sottilissimi del Sig.^r di Fermat intorno al centro di gravità, e confesso liberamente che mi sono parsi belli, & degni di quello sublime intelletto, che mi fù celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere che ne habbia assoluta dimostrazione; e perche il Sig.^{re} di Beaugrand mi disse di havere dimostrata una simile propositione, cioè, che il medesimo grave posto in diverse lontananze dal centro della terra pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai à pensare à questa materia, e pretesi allhora di havere ritrovata la dimostrazione, mà dopo essendo mi state promosse alcune difficoltà, mi raffreddai in questa speculatione: mi ricordo però che ancor io ne deducevo la medesima consequenza, che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè, che il grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno: e di più che la terra tutta non hà peso: e in oltre ne cavai, che descendendo un grave verso il centro della terra non solo và mutando peso di momento in momento, ma (cosa che puo parere più marauigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo nella mole di esso grave; di più che un grave di qualsivoglia figura che si mova in se medesimo circolarmente pure va continuamente mutando il suo centro di gravità: e per tanto facilmente concorro con il Sig.^r di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura tale quale l'hanno descritto comunemente i Mechanici: e se io credeffi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per ricevere documenti da S. Sig.^{ria} Ill.^{ma}, ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al quale prego V. S. J. dedicarmi servitore di singolare devotione, e li bacio le mani.

*VIRO CLARISSIMO DOM. DE RANCHIN,
Sen. Thol. Petrus de Fermat S. P.*

Polyænum tibi tuum, Vir Clarissime, mitto, sed observanda in eo quædam sup-
peditat codex manuscriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hætenus inc-
ditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum
& monitorum militarium inveni sub nomine Παρεκβολών, cujus auctorem licet manus-
criptus non detegat, colligo tamen ex glossario Græcobarbaro Meursij, eum esse He-
ronem, non illum quidem Alexandrinum cujus spiritalia & alia quædam opuscula
extant, & qui antiquo, hoc est, optimo ævo, Græcè scripsit, sed alium posterioris
ævi, quod pleraque ipsius vocabula Græcobarbara satis innuunt; utrumque, atatem
nempe & nomen auctoris, confirmat Meursius in voce κοντεβέρνιον ubi citantur sequen-
tia Heronis verba in παρεκβολαίς, ἀπέστειλε γέν της νυκτός εις τὰ ἀπληκτα αὐτῶν κ) τὸ κοντεβέρνιον,
hæc enim verba cum in meo manuscripto desint, supplendum in eo nomen auctoris
ex manuscripto Meursii; tempus vero quo hæc scribebantur & quo voces ἀπληκτον &
κοντεβέρνιον in usu erant, ultra septingentos plus minus annos non videtur excurrere;

hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni stratagemata suppresso authoris nomine alijs sæpe verbis referuntur, quandoque & ipsdem, unde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel si mavis doctis omnibus tuo nomine jure repræsentationis libenter exhibeo.

Cleomenis stratagema narratur lib. 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæsiæ frequentibus verbis, Κλεομένης Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεπεξέστη, ἦν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβῆς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βέλοιο ὑπὸ κήρυκῳ ἐσίμεινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐσπέδαζον, ἐπιζομένων ἀνθοπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπέξισαν, ἀναπαυομένων ἀντεναπαύοντο, Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιῆσθαι κήρυξεν, ἐπίσασθαι, ὃ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἀριστον ἐπράποντο, Κλεομένης ὀπλισμένους ἐπαρῶν ἀμαρῶς ἀνόπλους καὶ γυμνὰς τὰς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco post verba ἐξιόντων ἀντεπέξισαν, addendum ex manuscripto ἀριστώντων, ἡρίσων, quod finis ipsius stratagematis plenissimè confirmat.

Themistoclis stratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θημιστοκλῆς Γ'ωνῶν Ξέρξῃ συμμαχόντων, ἐκέλευσε τοῖς Ἕλλησι καταχεῖλαι ἐπὶ τῷ τείχεσσι, Ἄνδρες Γ'ωνες ἐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τὰς πατέρας, τέτων ἀναγνωσκόμενων βασιλεὺς ὑποπτεύσας αὐτὰς ἐποίησατο, corrigendum ex manuscripto ἐλόγησατο, quam esse veram lectionem innuit sensus.

Agésilai stratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαῳ, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναῖοι ἐνίκησεν, ἢ γλαίε τις, οἱ πολέμοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεῶν τῆς Ἀθηναῖας, ὃ ἢ προστάξεν ἕαν αὐτὰς οἱ καὶ ἐκλείντο ἀπέβαιναι, ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπογοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναῖοι reponendum ex manuscripto Θεβαῖοι.

Aliud Agésilai stratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαῳ ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίε τῶν πολεμίων τὰς μάλιστα δυνατὰς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῆ συμφερόντων, τέτοις ἐπὶ πλείστον συγγενόμενῳ, καὶ κοινῶν ἐστίας καὶ σπονδῶν, ἢ πόλεσιν ἕσασιν ἐνεπίοι διατὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας. Vulteius hoc modo interpretatur: Agesilaus in legationibus petebat ab hostibus ut maxime potentes ad se mitterent; cum quibus de communi utilitate sermones conferret, cum his plurimum habens consuetudinis, & communicans focum ac cineres, seditiones in urbibus excitabat propter vulgi suspiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod est in textu Græco, legisse σποδῶν cum vertat cineres, sed nihil mutandum ex manuscripto evincitur ubi leguntur hæc verba καὶ ὄγκους πρὸς αὐτὰς ποιόμενῳ.

Clearchi stratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχῳ ἦν ἐν Θράκη, νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στρατεύμα καταλαμβάνον, ὃ ἢ παρήλθειεν, εἰ γ' ἐνοίσο νύκτωρ θόρυβῳ, μηδένα ὄρθον ἀνίστασθαι, ὃ ἢ ἀναστὰς ἀναγείσθω, τὸ παράγγελμα τῷ ἐδίδαξε τὰς στρατιώτας καταφρονεῖν τῶν νυκτερινῶν φόβου. Verba quædam hîc supplenda ex manuscripto, quæ tamen videtur in suo codice vidisse interpres Latinus, licet desint in editione græcâ Tornæsij, sunt autem sequentia, καὶ ἔτιως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασόμενοι. Atque ita desierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ stratagema sequens legitur libro 4. pag. 114. Περδικκῆς Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμίων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἠλίσκοντο ζωρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι, ἐπεκηρυκθῆσατο περὶ λύτρων, ἐντεταμένῳ τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγλαίᾳ ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιτο, ἀλλὰ ψηφίσειεν τὰς ἀιχμαλώτους κτινύειν. οἱ δὲ Μακεδόνες ἀπογυνοῦντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας ἀτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾶν ἔχοντες τὸ ζῶζεσθαι, quod sic interpretatur Vulteius. Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur vivi, reliqui etiam redemptionis spe ad pugnam minùs alacres erant, quibus legationem inter se de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato ut reversus nuntiaret se redemptoria munera Illyriorum non accepturum, sed condemnatos captivos morte affecturum, Macedones desperatâ salutē redemptivâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in solâ victoriâ salus posita esset. In hoc stratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæsiæ; si vera esset explicatio Vultei, non solum vera sed & necessaria esset illa emendatio, sed frigidissimum esset stratagema, si sequeremur sensum interpretis: Polyænus quippe vult Perdiccam præcepisse legato, ut

reversus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic est verus sensus stratagematis, quem Hero aliis verbis, secundum hanc quæ est vera & germana interpretatio, expressit in manuscripto his verbis, ἐπετήδευσε τοιοῦτον, παρεσκεύασε τινὰ ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμοι ἐβλαλεύσαντο καὶ ἀπεκίρωσαν ἵνα ὅσους κρατήσασιν αἰχμαλώτους ἀποκλείνωσι.

Alexandri stratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis sequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ ἐπατάσασθαι μέλλον, ἐπαγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἦν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν, ἦν δὲ ἡ σάλπηξ ὑποσημήνη τότε δὴ Μακεδόνες ἕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλευσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος ὃ ἐκυδριεῖτο καὶ φαιδρὸς ἦν, ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπηκος ἀναπηδισαντες ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν ἐλάττω ῥήξαντες εἰς φυγὴν ἐτρέποντο.

Hoc loco desunt quædam verba post vocem τότε, quæ supplenda ex manuscripto ubi narratio est integra & elegans; lacuna itaque ex eo sic replenda, τότε μὲν θυμῷ καὶ ἀνδρείῳ τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis stratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλείονων ἀποληθεῖς ἐπιμύεν αὐτομόλον εἰς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὃ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἠγγελε τῷ Παμμένει, ὃ ἦ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλὰς αὐτῶν φείρας διεξιπώσατο αὐτὸς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τὰς οἰκείας μὴ δυναμένοις διὰ τῆς συνθήματι.

Hic addenda ex manuscripto post verbum αὐτὸς sequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὃ τότε στρατὸς ἐγνωτὸν τῷ πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τὰς ἰδίους ἢ τὰς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompisci stratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπήσκῳ ἑριστρατέων πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολὺν τῆς χάρας ἐξιέναι τὰς πολεμίους ἐκόλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχῶς καὶ τοῖς ληιζομένοις ἀπέχεσθαι τῆς πόλεως τότε τότε προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως ἀδεῶς ἐπαύθηα προίεσαν, ὃ δὲ ἑστὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἐμαθεν, τὰς ἠκοντας πολλὰς ἐπιθέμενος τὰς πλείους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuscripto & loco illius reponendum συνεχῶρει quod ex conjecturâ viderat Casaubonus ut patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάνορμον πολιορκεῖν τῷ Λεωθένει πρὸς ἅπασας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερώς ναυμαχεῖν ἐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum esse, ἐπὶ ἀκατία, ut vult Casaubonus in notis; confirmat codex manuscriptus ubi legitur διὰ μακρῶν πλοιαρίων, quæ verba idem sonant.

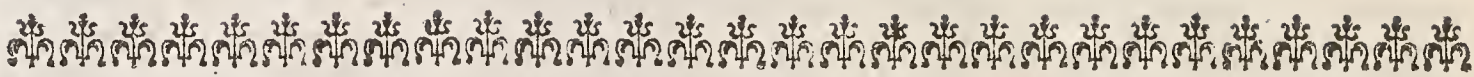
Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κύριος Μήδους ἐπατάξασθαι τρεῖς ἡτλήθη; ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις τῷ τελέστῳ μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἶδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τὰς Μήδους ἀλάκτως διώκοντας τρεφόμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνέκησαν, ὡς μηκέτι Κύρον πρὸς αὐτὰς ἀλλοτρίως δευθῆναι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες, quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo coniciamus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis sequentibus rem narrat & stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθεία τέτων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris sensui respondet quam π παθόντες ut legendum censuit Casaubonus.

Darii stratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκκας τριχῆ διηρημένοις, μίαν ἐκράτησε μοῖραν, τῶν δὲ Σακκῶν ἰζόντων τὰς ἐδῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα φειθέθηκε τοῖς Πέρσαις &c. hic loco vocis ἰζόντων quæ est corrupta in editione Tornæsii, legendum ex manuscripto ἀναρεθέων.

Scipionis continentiae exemplum laude dignissimum refertur lib. 8. pag. 568. sequentibus verbis; Σκιπίων δρυάλωλον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν φοίνισαν, ὡς οἱ φυλαγωγοὶ παρθένον ἦγανον κάλλει ὑπερφυῶς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τῆς δὲ δῶρα προσεμίσατο, ὃ ὃ καὶ ταῦτα συνεχάρισατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur φυλαγωγοὶ quod interpres vertit captivorum ductores, sed legendum ex manuscripto, νυμφαγωγῶν hoc est virginum ductores, quæ correctio & verissima, & elegantissima, ut nullus superfit dubitandi locus.

Plura adjungerem, sed feriis jam desinentibus quarum beneficio otium suppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.



VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON,
 Libellorum supplicum Magistro.

Samuel de Fermat.

S. P.

Criticas observationes quas mihi nuper misisti, vir clarissime, sapius legi non sine voluptate & admiratione; in illis enim ingenii, judicii, & doctrinæ dotes quas in te jam pridem suspicimus ubique clucunt: nihil autem invenire possim quod tanti muneris vice tibi referam, nisi commodum egestati meæ succurrerent variæ lectiones quas vir tibi singulari conjunctus amicitia, cujus mihi jucunda semper est recordatio, margini apposuit quorumdam librorum quos sedulo pervolvebat, & quorum pleraque loca, sed ἐδὲ παρέργον, emendavit; scis enim quàm præcoci ille ubertate florum amantitatem fructuum maturitati junxerit, nec me latet quantâ ipse fiducia suas exercitationes solitus sit in tuum sinum effundere; licet autem omnes istæ quas excerpfi emendationes, vel parentis mei conjecturæ, tibi novitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua est comitas, te benignâ manu suscepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clarissime, nosti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κτ' μαθηματικῶν χρησίμων εἰς τὴν τῆς Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi instar est aut isagoges Philosophiæ Platoniciæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat: illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Ismael Bullialdus vir doctissimus & Latinitate donatum elegantibus notis illustravit; sed non omnibus illud mendis purgasse videtur, ut aliquot, ni fallor, exemplis, quæ sequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis ubi περὶ ἀρμονίας & συμφωνίας agit: locum illum exscribere non piget, ipsa enim series emendationis procul dubio necessitatem, & veritatem ostendet; τὰ γράμματα, ait ille, φωνὰ πρώται εἰσὶ καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάττωσαι, & inferiùs, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὀπίπτες πάλιν φωνὰ εἰσὶ πρώται καὶ διαιρετικὰ καὶ σοιχειώδεις, huic voci διαιρετικὰ asteriscus in margine respondet cum voce διαιρεταί, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαιρετοὶ loco τῆς διαιρετοὶ & διαιρετικὰ, legendum nempe γράμματα φωνὰ εἰσὶ ἀδιαιρετοί, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἀρμονικῶν: legendum præterea φθόγγων ὀπίπτες πάλιν φωνὰ εἰσὶ πρώται καὶ ἀδιαιρετοί, & hæc quoque lectio confirmatur verbis ejusdem Bryennii lib. 1. cap. 3. ubi dicit φθόγγος ὅτι ἀρχὴ ἀρμονίας ὡς ἡ μονὰς τῆς ἀριθμῆς, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τῆς χροῆς, punctum, vero & instans sunt ἀδιαιρετὰ & consequenter φθόγγος ἀδιαιρετός, non dividendi vim habens, ut vult interpres Latinus: nec immerito Bacchius Senior in introductione artis musicæ quæstioni illi τὸ εἶν ἐστὶν ἐλάττωσον τῶν μελωδουμένων, respondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάττωσον, sed etiam ἀτομον esse docet antiquæ musicæ celeberrimus auctor Aristides Quintilianus lib. 1. de Musicâ, atque ita autoritas æque ac ratio suffragatur huic emendationi, quæ fit unius tantum litteræ mutatione. Minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, ubi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τὰς Πυθαγορικὰς, legendum scilicet, φασὶ, ut apud Bryennium λέγουσι. Paulò inferiùs ubi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρῆς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἢ χθθ, ἡρέμικ δὲ μικρᾶς, legendum videtur ἡρεμαίας, & Bryennii autoritate confirmatur.

Hactenus de sono de quo agitur in cap. illo 6. In cap. vero 8. agitur de semitonio, & ita vulgò legitur κτ' καὶ τὸ ἡμῶνον γραμμα ἐκ ὧς ἡμῶν φωνῆς καλεῖται ἀλλ' ὡς μὴ τῷ αὐτοτελεῖ κτ' ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὼ non κτ': legendum præterea ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελεῖ καθὼ αὐτὸ φωνὴν ἀποτελεῖν, quæ lectio ejusdem Bryennii autoritate nixa veriore vulgatâ sensum efficit.

Atque

Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐκ τῶν ᾠδῶν τοῖς μουσικοῖς ὑποθεμένων καὶ ἐκ τῶν ᾠδῶν τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανόμενων, ut Porphyrii verbis utar, quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276. sed non sine mendo, malè enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μουσῆς ὑποθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, & audacter dicam, certissima alterius loci ejusdem Theonis emendatio paginâ 164. ubi de octonario loquitur: refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradidit Evander hoc modo, Πρεσβύταλθ πάντων Ὀσίρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ ἔρανθ ἡλίω καὶ σελήνη καὶ γῆ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς ἀπὲ ἀρετῆς βίᾳ συντάξεως, id est, ut vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cælo, Soli, & Lunæ, & terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ ejus: mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita parvâ unius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amor sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cujus velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in convivio καὶ μὲν δὴ τὴν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων πῶς ἐναντιοῦσθαι μὴ ἐκὶ ἔρωθ ἔθ' σοφίαν ἢ γῆνεσαι καὶ φέσαι πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectio, ut vertit Serranus, ex amoris scientiâ existere, id est gigni atque nasci ecquis negaverit,

Per quem genus omne animantium

Concipitur, visitque exortum lumina Solis.

Apud Iulium Frontinum de aquæductibus Romæ pag. 106. editionis Plantinianæ, vulgò sic legitur: in vicinariâ fistulâ, quæ in confinio utriusque rationis posita est, utriusque rationi penè congruit. Nam habet secundum eam computationem, quæ interjacentibus modulis servanda est in diametro quadrantes viginti: cùm diametri ejusdem digiti quinque sint, & secundum eorum modulorum rationem qui sequuntur ad eam, habet digitorum quadratorum ex gnomoniis viginti. Hic procul dubio legendum non ad eam, sed aream: cujus emendationis ratio ex supputatione geometrica ducitur.

Eadem etiam paginâ legitur, centenaria autem & centenum vicenum, quibus assidue accipiunt, non minuuntur, sed augentur, Nec usu frequens est: videtur legendum Cen. id est centenaria, loco vocis illius Nec, litteris scilicet ordine inverso accipiendis, cum fortasse in manuscripto repertum fuerit Cen. hoc est centenaria, quod transcriptor transposuit & legendum Nec, particulâ sensui magis, ut videbatur, accommodatâ perperam existimavit.

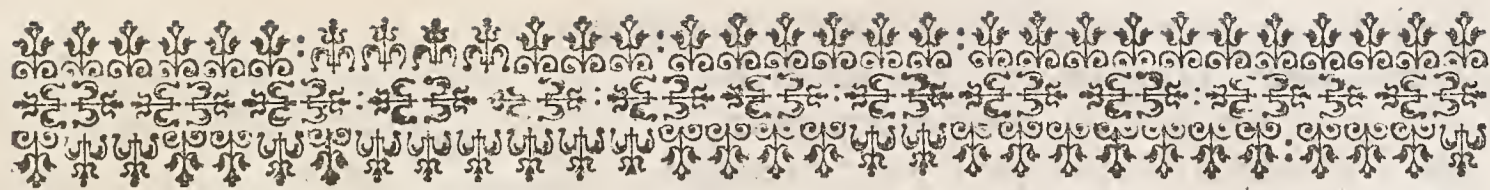
His emendationibus unam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhonia-rum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diversitate ætatum Phantasia, ᾠδὴ δ' τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς αἶρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δ' ἀκμάζουσιν ἔνθερος καὶ αὐτὸ βρώμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δ' ἀκμάζουσιν κατακορὸς, καὶ φωνὴ ἢ αὐτῇ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δ' ἐξέλικεθ, id est, ut vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aër senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur, at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, aliis quidem depresso esse videtur, aliis vero alta; at hujus loci elegantior sensus erit si legatur non βρώμα sed χρώμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hic foret sermo: præterea τὸ ἀμαυρὸν melius colori convenit quam cibo, & æquè de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὸς, sic apud Virgilium legimus, *saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.*

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem urbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat, quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de depravatis Alcibiadis moribus, qui locus si vulgatam lectionem

retineas ipso forsan Alcibiade depravior erit ; Athenæi verba hæc sunt, *Λυσίας ὁ ῥήτωρ* παρὶ τῆς τρυφῆς αὐτῆ λέγων φησὶν , ἐκπλάσσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξιοχῶς καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐκ Ἀβύδου δύο ὄντε Μεδοντιάδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνοκείτην , ἐπίστα αὐτῶν γίνεται θυγάτηρ ἢ ἐκ ἑφαντο δύνασθαι γινῶναι ἰσχυτέρου εἶη , ἐπεὶ ὅ ἦν ἀνδρὸς ὠραῖα Ξυνοκοιμῶντο καὶ ταύτη καὶ εἰ μὲν χρῆτο καὶ ἔχει Ἀλκιβιάδης Ἀξιοχῶς ἔρασκεν ἢ θυγατέρα , εἰ ὅ Ἀξιοχῶς Ἀλκιβιάδης ; error hîc procul dubio in voce illa Ξυνοκείτην , & legendum Ξυνοκείτην hoc est concubuerunt , atque ita si falsa Xynoceipe deleatur , & sola supersit illa duobus nupta Medontias , portentosa istorum iuvenum libidinis novitati nihil detrahetur ; veritas autem istius emendationis satis per se patet , & ex ipsâ loci serie elici potest , in quo illud δύο ὄντε alioqui supervacaneum foret , nec jam amplius ambigua proles ; ratio igitur illius correctionis in promptu est , cui ejusdem Athenæi accedit autoritas , is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo , *Μεδόντιδος γέν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἔσερξε καὶ πλεῦσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιοχῶ ὅς ἦν αὐτῆ τῶ ὠρας ἔρασης , ὡς φησὶ Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κτ' αὐτῆ λόγῳ , καὶ ταύτης ἐκοινοῆσεν αὐτῷ* , id est ut interpretatur Dalechampius , Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare coepit , & imprimis charam habuit , eam tamen cum Hellepontum navibus adiisset , Axiocho navigationis comiti , & pulchritudinis ipsius amatori , ut inquit Lysias in oratione quam contra eum scripsit , utendam dedit ; ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio , & illud ἐκοινοῆσεν æque ac Ξυνοκείτην communes Alcibiadis , & Axiochi amores fuisse satis arguit.

Sed ab istorum juvenum voluptate oculos avertamus , & eam quæ ex studiorum societate percipitur , puriorem & diuturniorem , summumque adverforum solatium literas esse fateamur ; cum tu his mirum in modum oblecteris , non iniucundas tibi fore confido observationes in quibus amici manum agnosces ; ipsius ego lucubrationum sparsas varijs in locis reliquias è tenebris quibus abditæ jam pridem erant , eruere conatus sum , neque hæc contemnenda duxi , ut ex hoc spicilegio rerum quæ diligentissimos , ut ita loquar , messorum latuerunt , pateat , quantam earum auctor in liberiori & conjecturis aperto critices campo segetem fuerit collecturus , si sæpius in illo spatium voluisset : Vale & me ama.





C E D E D E O, SEU CHRISTUS MORIENS.

D. Petri de Fermat Carmen amœbæum ad D. Balzacum.



OBSTUPUIT totiesque elusum mentis acumen
Dedidicit vanos veris præferre colores
Luminibus. Quid bella moves, deletaque pridem
Numina præstigiis linguæ solertis adumbras
Infelix ratio? Num te simulachra tot annis

Desita, & imbelles Divûm sub imagine formæ
Fallaci cinxere metu? Num te ostia Ditis
Aut stygiæ remorantur aquæ, Elysiive recessus,
Et quidquid credi voluit Dijs æqua potestas?
Perge tamen quò te securo tramite ducunt
Balzaco præeunte viæ, nec inertia dudùm
Fatidicæ responsa Deæ, quercusve silentes
Dodonæ, aut taciti venerare oracula Phœbi;
Cede Deo. Cessit veterum numerosa propago
Cœlicolûm: Deus ecce Deus, quem prona parentem
Agnoscit natura suum, cui terra, salumque
Paret, & edomitæ fatalia flabra procellæ,
Submittuntque ipsæ jam non sua murmura nubes.
Hiç puro fulgore micans, de lumine lumen
Dum traheret, Deus unus erat, natusque supremi
Æternâ æternùm manans de mente parentis
Assumpsit veros morituræ carnis amictus,
Si qua fortè queat mortalia flectere corda,
Tantillumque animis extundere possit amorem.
At postquam summi tandem mandata parentis
Horrendo sacrum caput objecere furori,
Humanas mœrenti animo depromere voces
Cœpit, & insolito succussus membra fragore,
Omnipotens, si nondùm orbem mala nostra piarunt,
Et placet infandum pœnæ genus, en, ait, adsum
Victima, lethiferoque libens succedo dolori.
Cerne tamen sudore madens & sanguine corpus,
Et si nulla super nostræ tibi cura salutis,
At saltem solare animum non digna ferentem.
Dixit & humentes oculos ad sydera tollens,
Quas non ille preces, quæ non suspiria fudit
Anxius ærumnisque gravis, tua, rector Olympi,

Dum satagit , mentemque futuræ accingere pugna
Sponte parat ? Coelo intereà demissus ab alto
Aliger , ut varios animi componeret æstus ,
Improvisus adest , ceciditque repente fragorum
Turba minax , auctæque superno robore vires
Despectant longè pœnas , nondumque paratæ
Incubere Cruci : nam cur , supreme , moratis
Rector , ait , cur me per tanta pericula vectum
Sistis , inexpletoque obices opponis amorì ?
Dixerat , humanisque iterum succumbere curis
Visa caro , tristes agitant præcordia motus ,
Necdum securo gressu vestigia ponit.
Hæc inter dubiæ mentis certamina totam
Noctem orat , socios altus sopor urget inertes ;
Quos decuit vigiles oranti impendere curas.
Heu pavidæ mentes , si nec cœlestia tangunt ,
Nec veræ virtutis honos , hoc munere saltem
Defungi jurata fides , jussumque magistri
Debit una sequi ; sed jam strepit undique murmur ,
Et segni tenebras abrumpunt lumine tædæ ;
Quò se cumque feret , jam vis inimica propinquat ,
Fictaque adorantis species , verique dolores
Non procul. Infausti tandem sub pondere ligni
Deficit , affixusque cruci , jam verbera passus ,
Jam spinas , laceros spargens tormenta per artus ,
Nempe urgebat amor , nostræque cupidò salutis ,
Humanam egressus sortem , mortique tremendus
Dum fieret morti propior , fremitusque , minasque ;
Et conjuratæ spernens convicia turbæ ,
Degeneri vitam populo pacemque precatur ;
Nec , quas ipse tulit pœnas , tortoribus optat.
Et jam finis erat , violataque pectora puri
Muricis undantes spargebant undique rivos.
Nec tamen imbelli subiit fata ultima mente ;
Quin magis assurgens , divinaque lumina , Cœlo
Sic propior , vocemque sonoram ad sydera tollens ;
Summe Deus , quid me moribundum deseris , & jam
Semianimem , populique tuoque furore fatigas ?
Sat tibi , sat mundo dedimus , finitaque dudum
Singula præscriptas habuere oracula metas.
Sic fatur moriens , elataque lumina rursùm
Figit humi , nec jam Coelum spectare facultas
Ulla datur , cecidere animi , marcentiaque ora
Æthereo vocem extremam fudere parenti :
Hanc tibi , summe parens , animam commendo , nec ultra
Profiliit , vitamque simul cum voce reliquit.
Haud secùs extremo videas spiramine lychnum
Ingentem nisu valido producere lucem ,
Et sursùm elatas , iterum subsidere flammis ,
Donec anhelanti similem circumfluus humor
Deserit , & densæ subeunt fuliginis undæ :

Debilis intereà visa est scintilla per umbras
Semianimes atris miscere vaporibus ignes,
Deficiunt tandem & vano conamine fursùm
Evecti, æternis noctis conduntur in umbris.
Nec tamen æternæ claudent tua lumina noctes,
Nate Deo, veram referet lux tertia lucem,
Et majora dabit renovato lumina mundo.

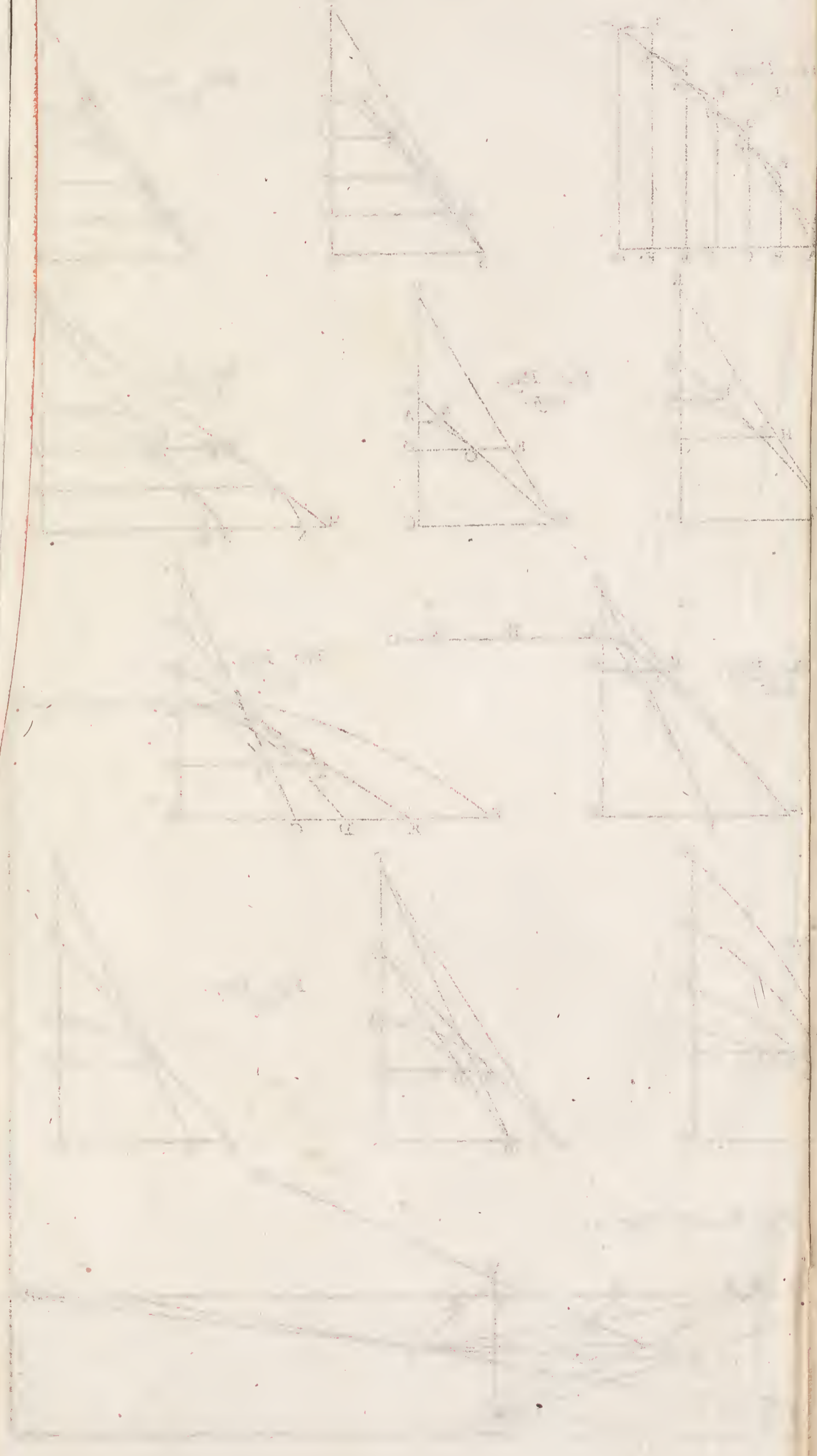
Quò me, quò, Balzace, rapis? juvat ire per altum
Exemplo quocùnque tuo me musa vocarit,
Exiguo sine te vix suffectura labori;
Scilicet optati venient tanto Auspice versus,
Et quo Pierij frueris super ardua montis
Editus, hoc olim forsan potietur honore
Balzaco proles non inficianda parenti.



Faint, illegible text in the upper right corner, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



THEORY OF THE DRESS
PART I. PRACTICE



FIGURÆ À PAGINA ^{104.} AD Pag. 117.
PRÆTER FIG. QUÆ DEEST Pag. 91.

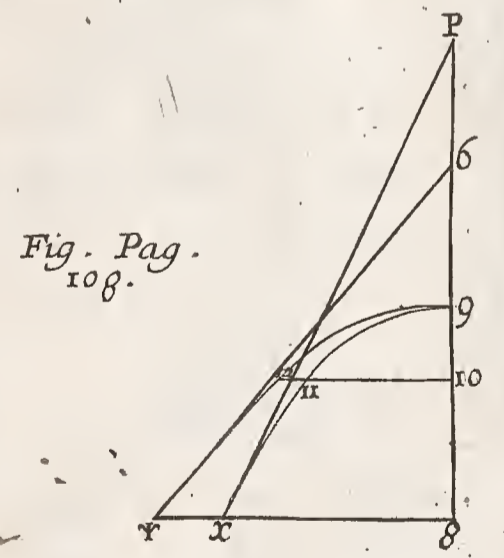
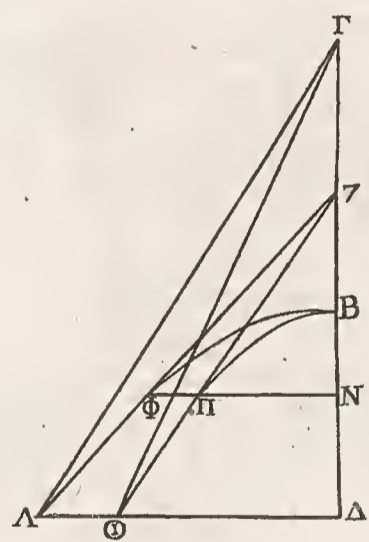
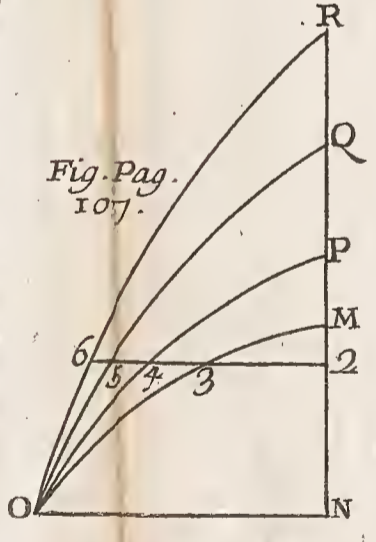
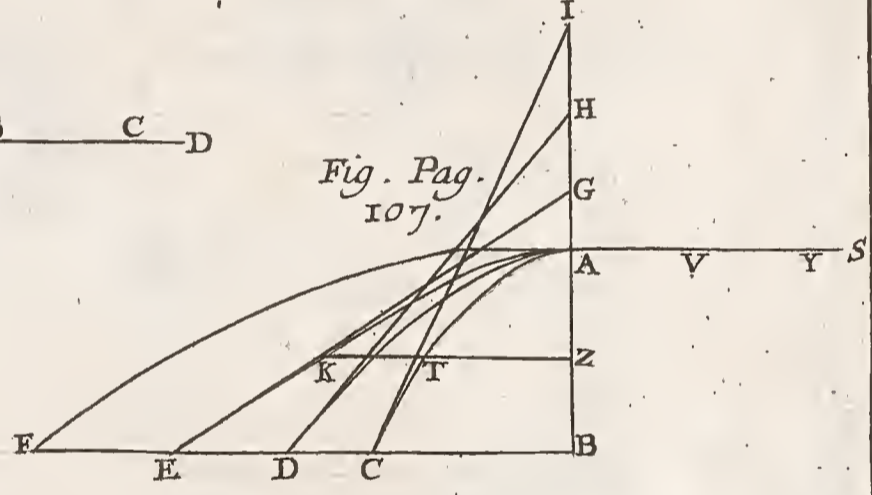
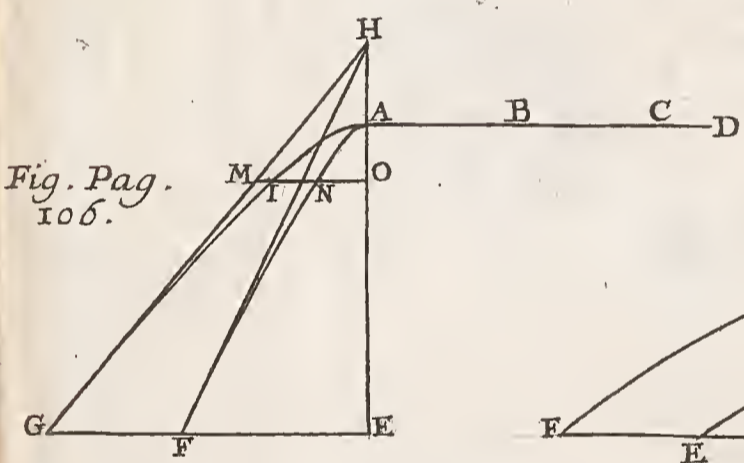
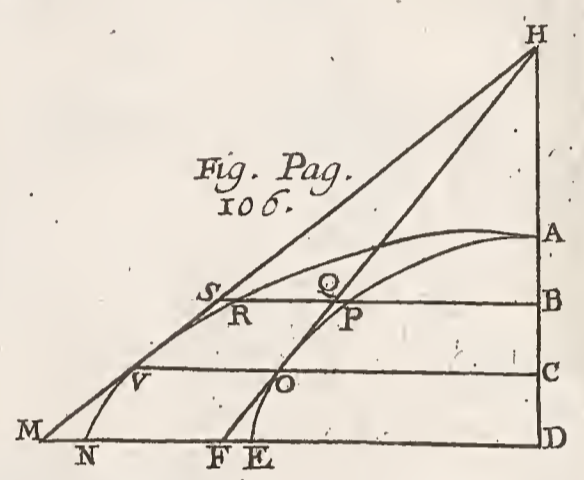
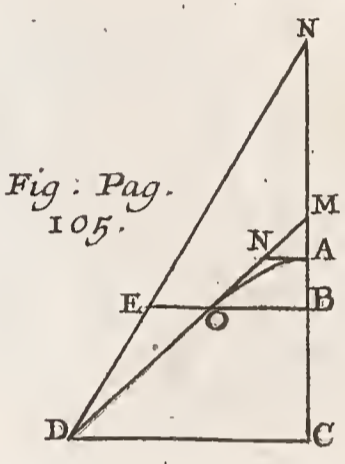
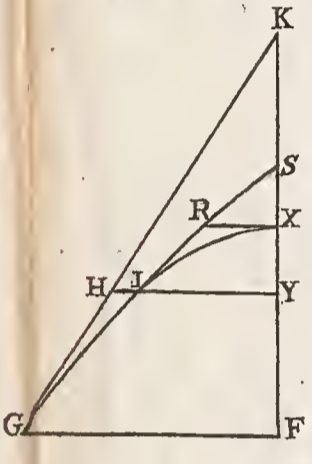
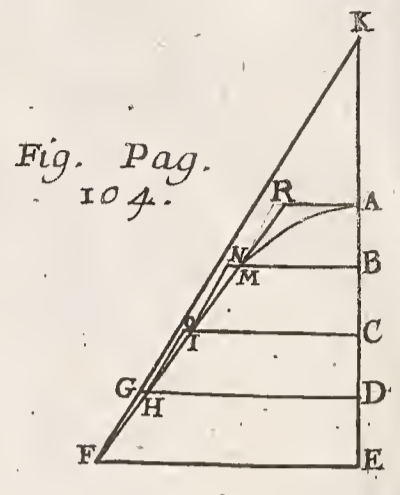
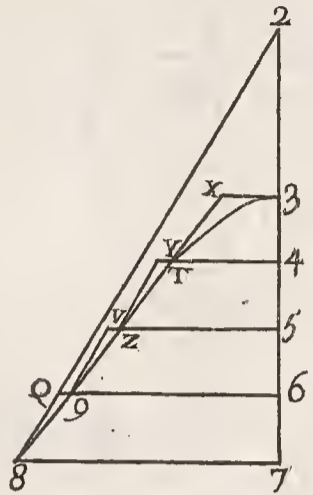
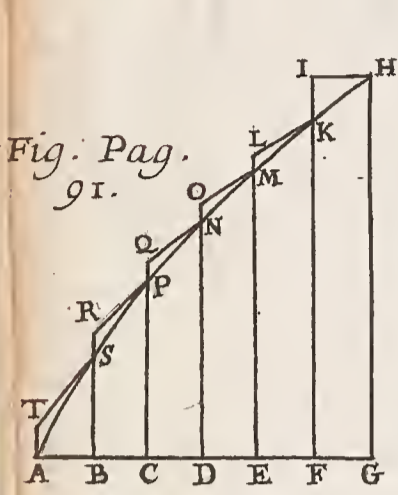
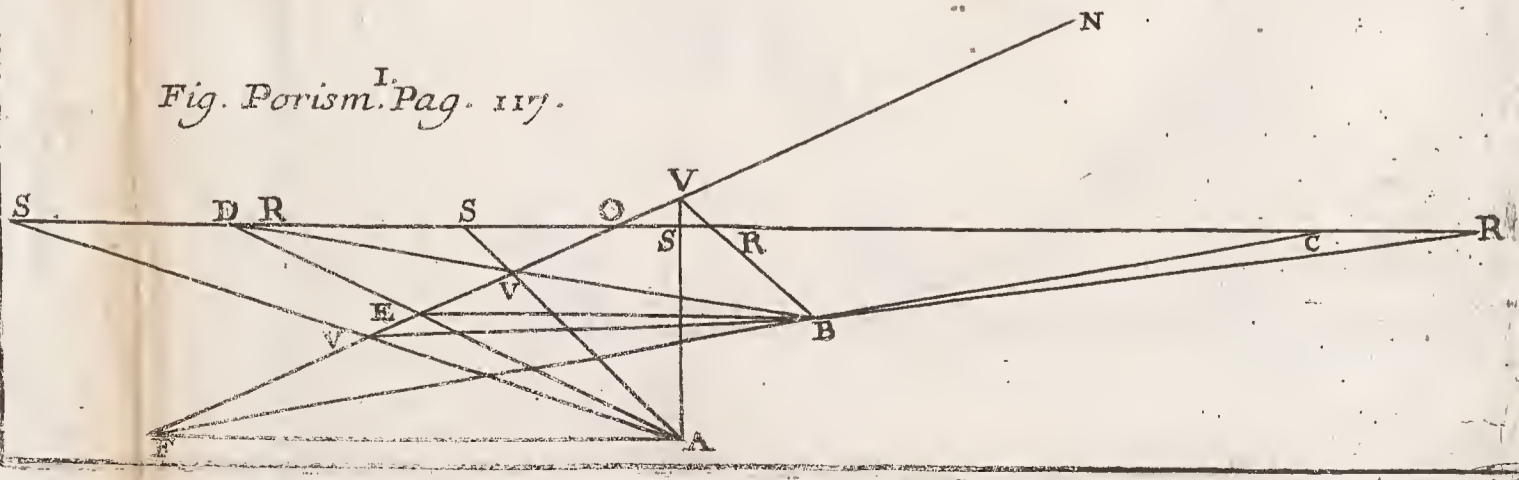


Fig. Porism. I. Pag. 117.



FIGURÆ À PAGINA 117. AD Pag. 127.

Porism. 2.
117.

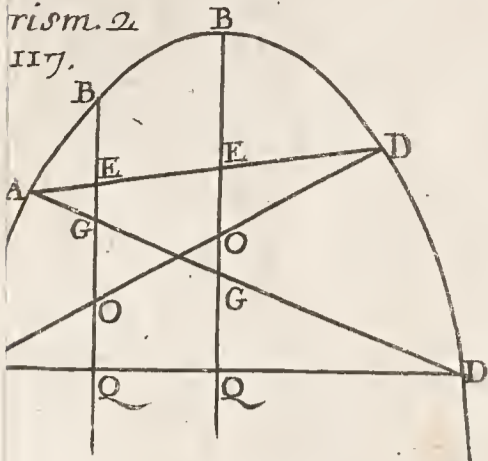
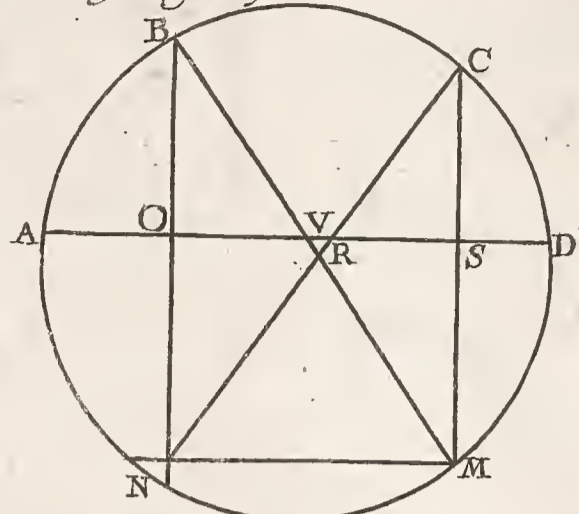


Fig. Porism. 3. Pag. 117.



Porism. 8.

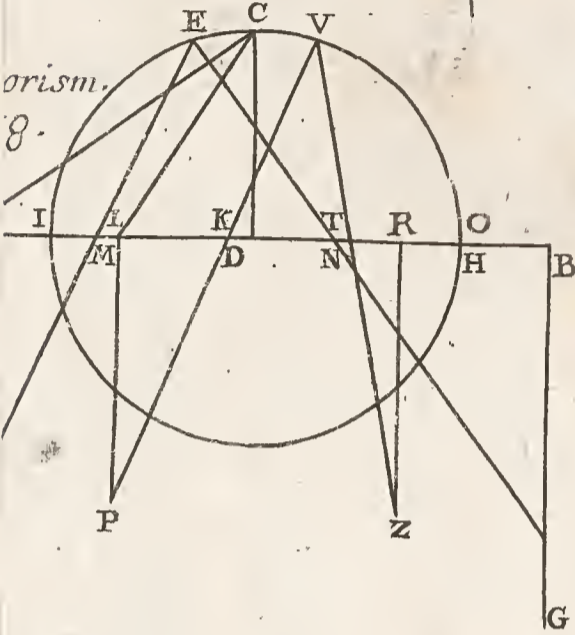


Fig. Porism. 5.
Pag. 118.

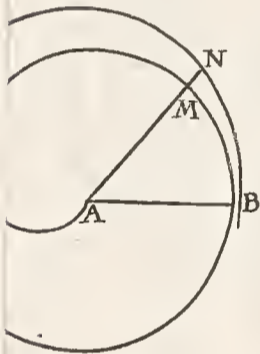
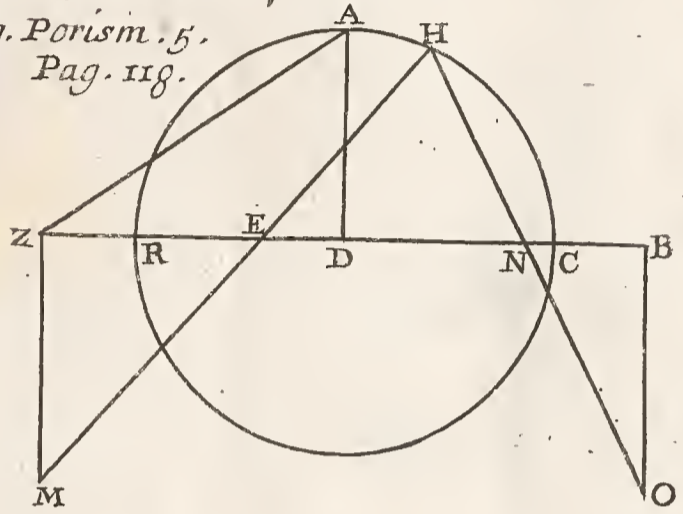


Fig. Pag. 122.

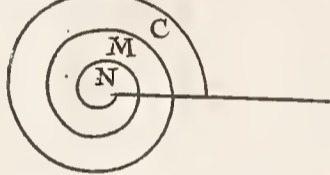
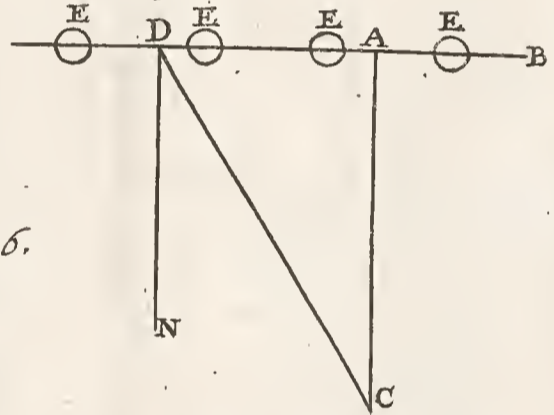


Fig. Pag. 123.



125.

Pag. 126.

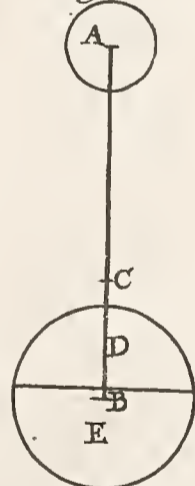


Fig. Pag. 126.

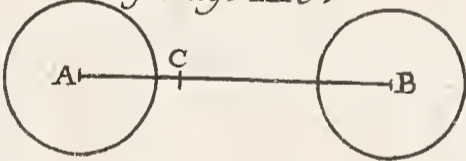
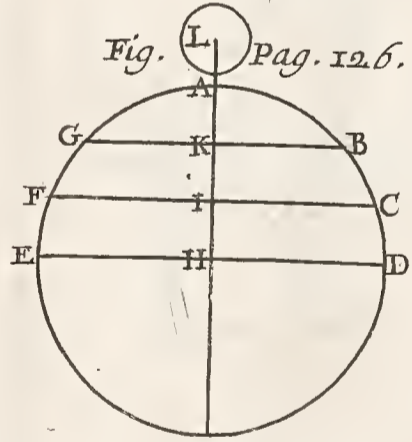


Fig. L. Pag. 126.



Pag. 127.

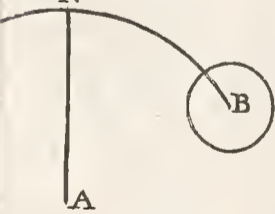


Fig. N. Pag. 127.

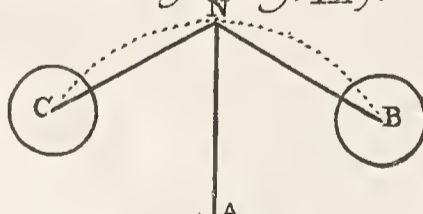
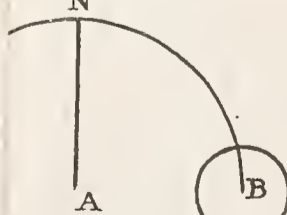


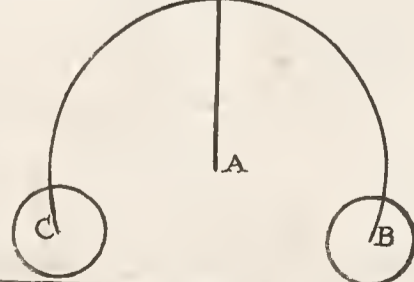
Fig. N. Pag. 127.



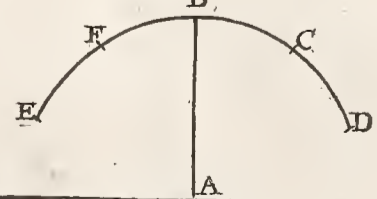
Fig. Pag. 127.



Pag. 127.



Pag. 127.



FIGURÆ À PAGINA 117. AD Pag. 127.

Fig. Porism. 2
Pag. 117.

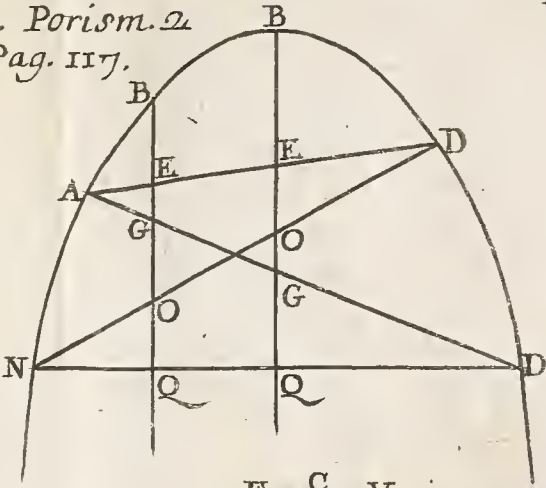


Fig. Porism. 3. Pag. 117.

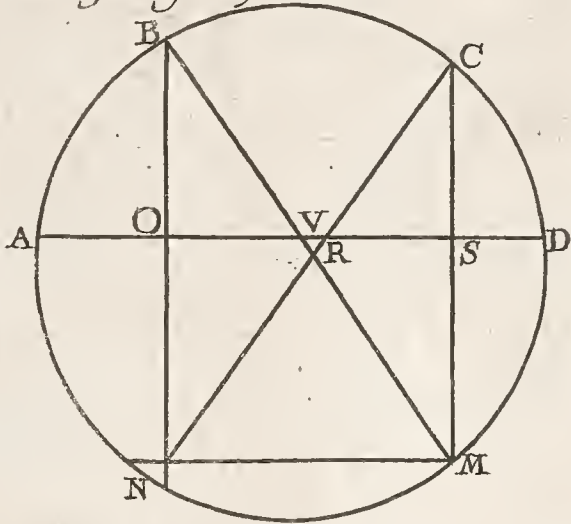


Fig. Porism. 4
Pag. 118.

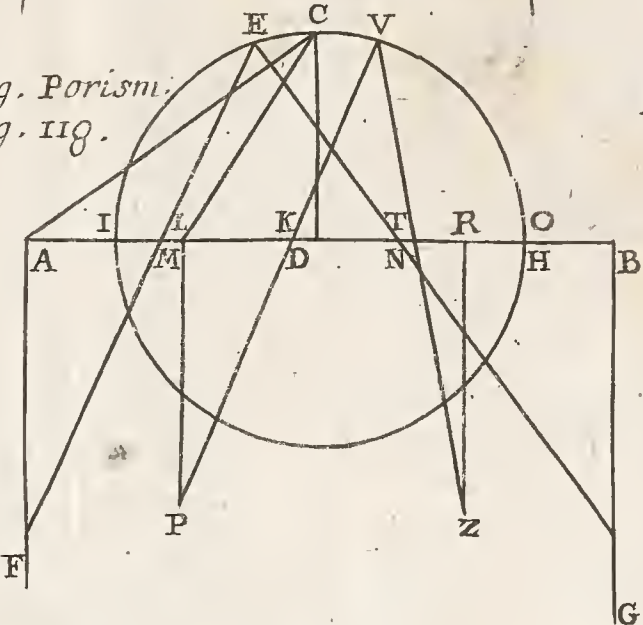


Fig. Porism. 5.
Pag. 118.

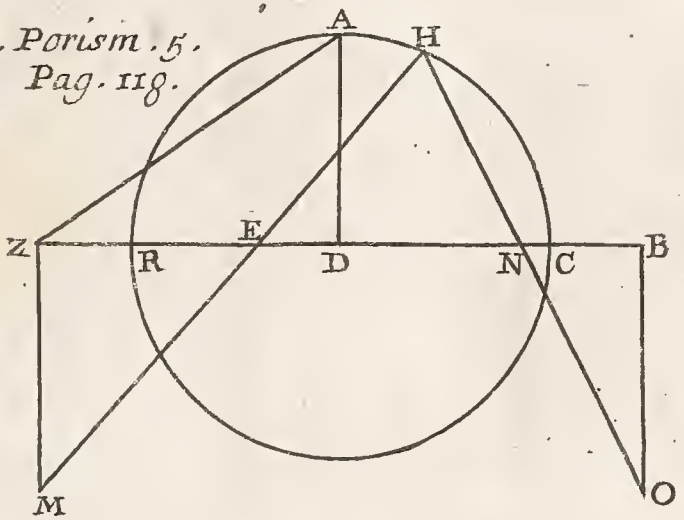


Fig. Pag. 121.

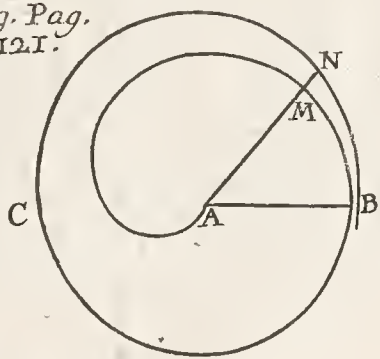


Fig. Pag. 122.

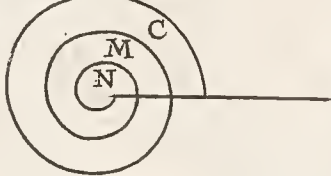
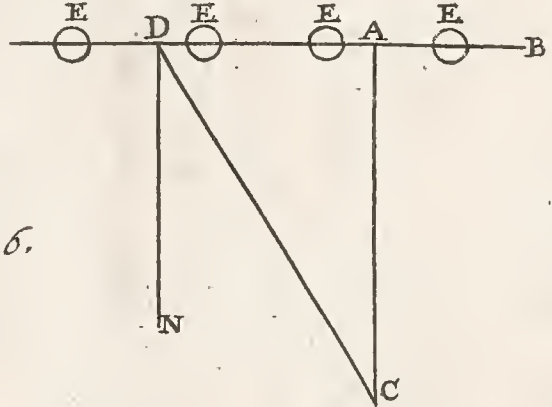


Fig. Pag. 123.



Pag. 126.

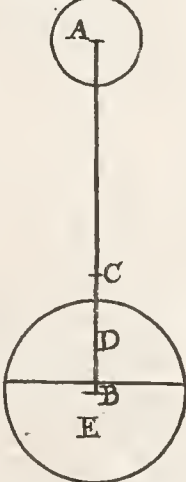
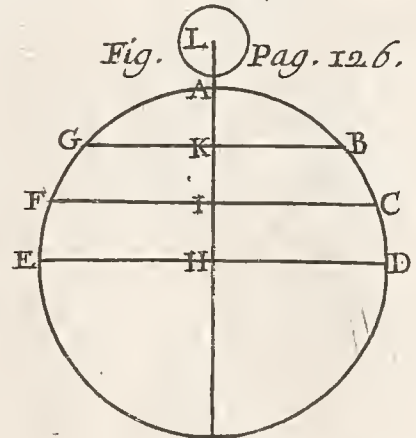


Fig. L. Pag. 126.



Pag. 125.

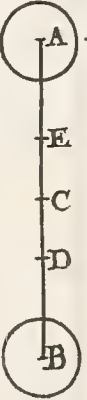


Fig. Pag. 126.

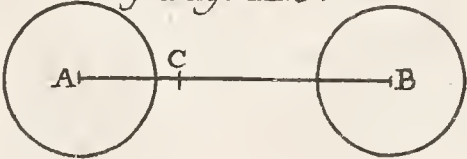


Fig. Pag. 127.

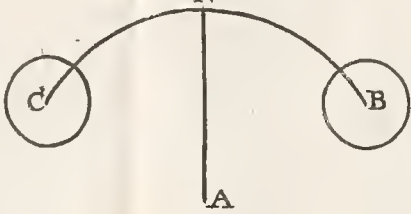


Fig. N. Pag. 127.

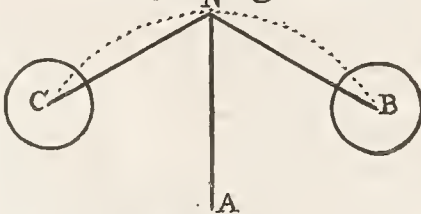
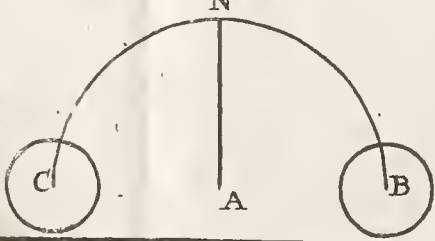


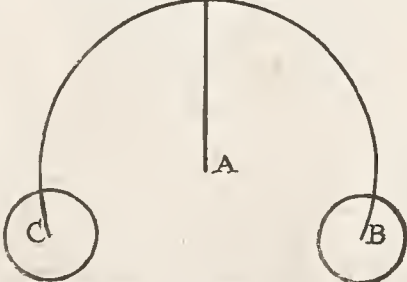
Fig. N. Pag. 127.



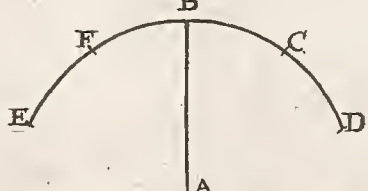
Fig. Pag. 127.



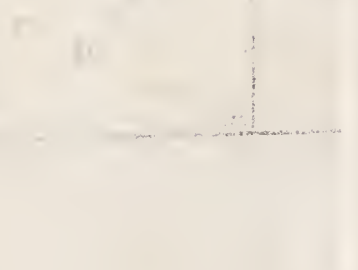
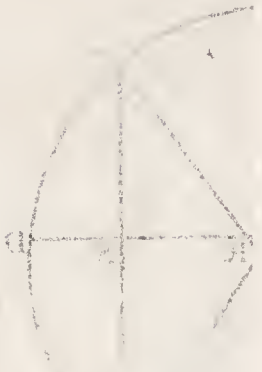
Pag. 127.

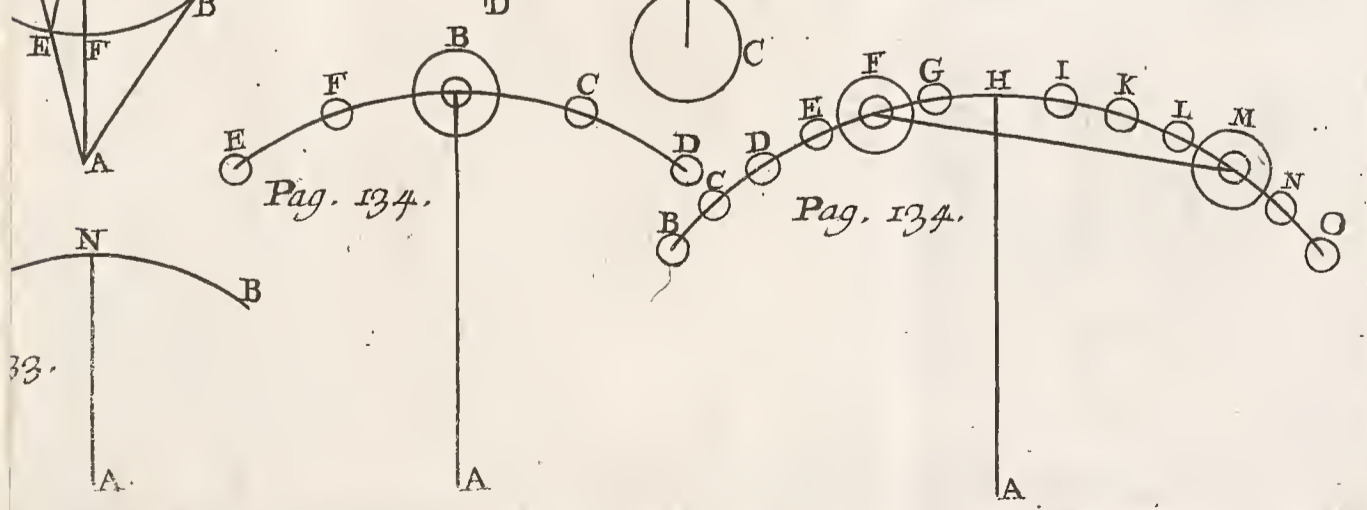
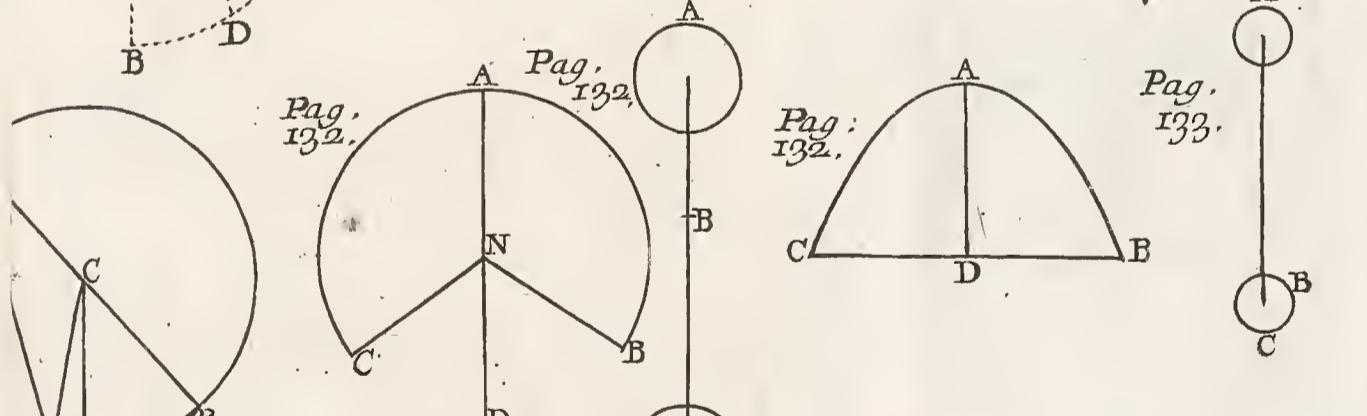
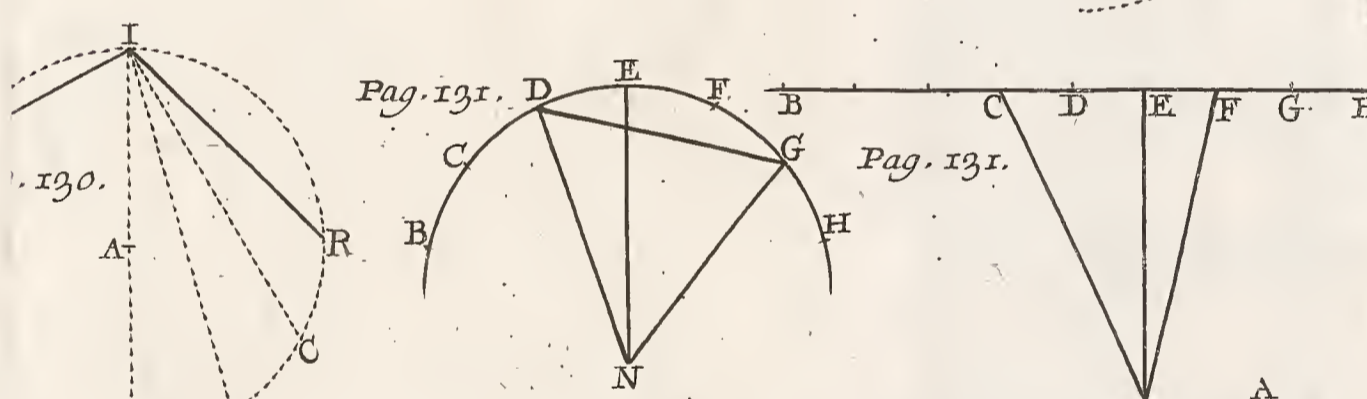
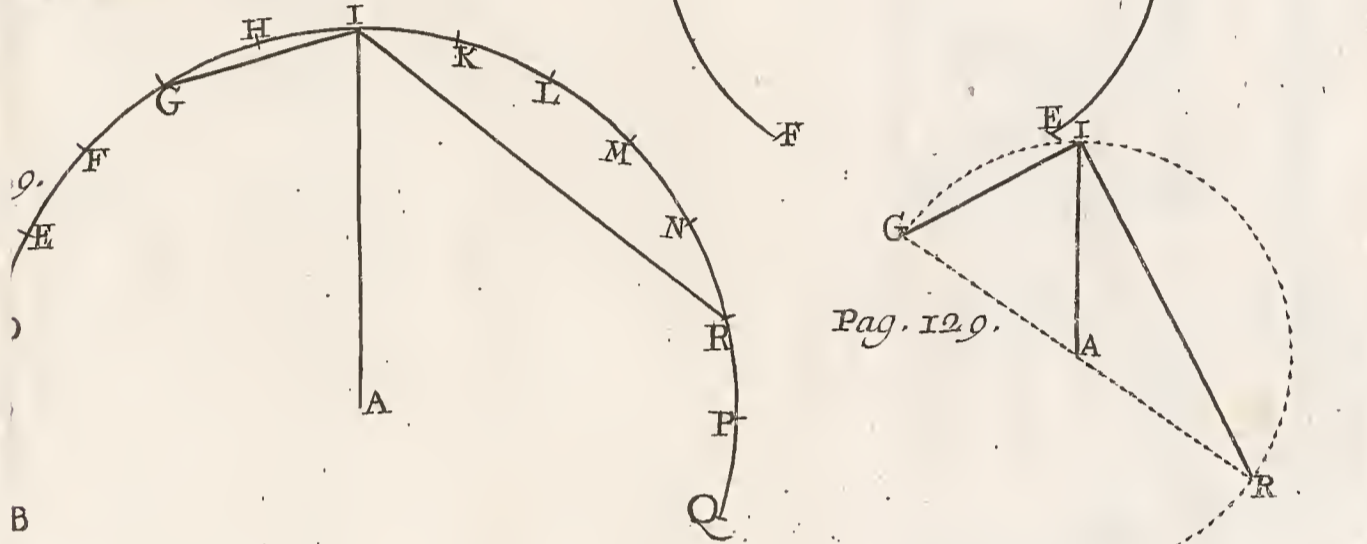
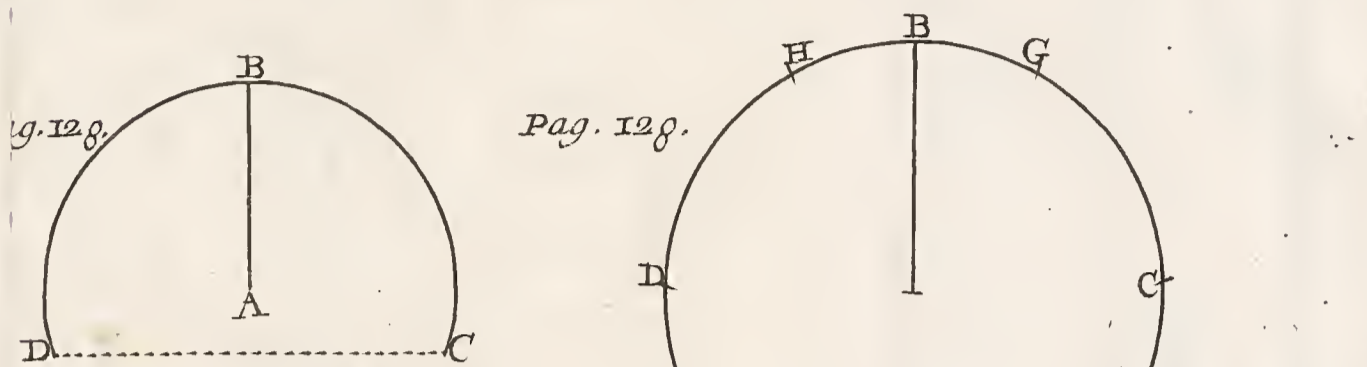
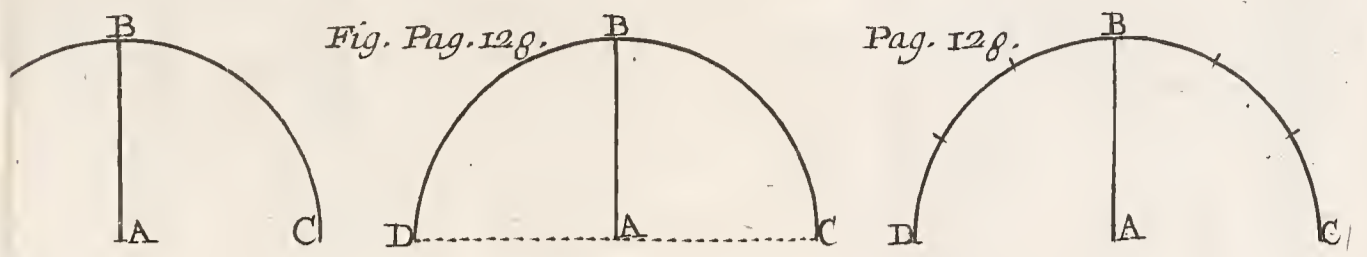


Pag. 127.

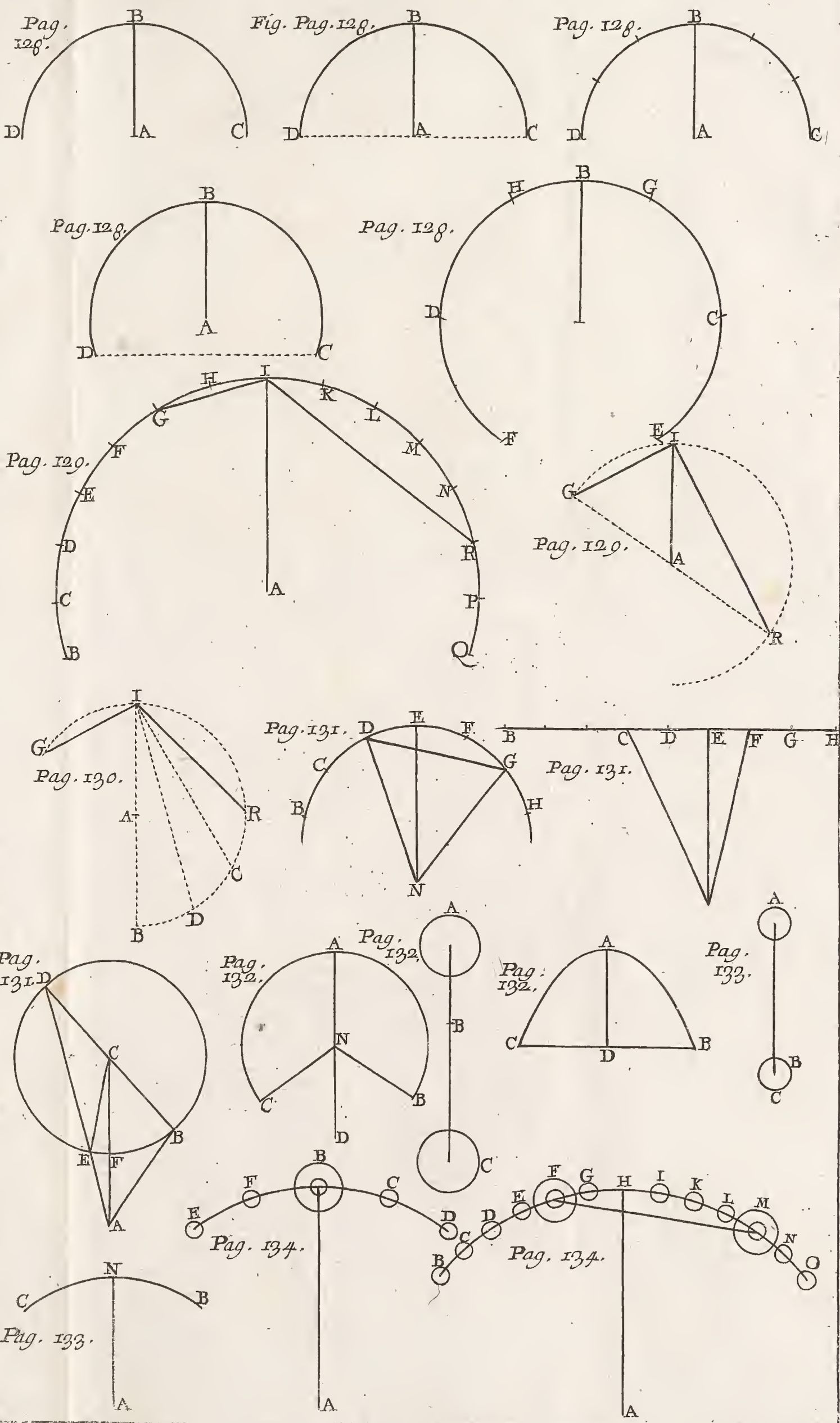


10. 10. 10.

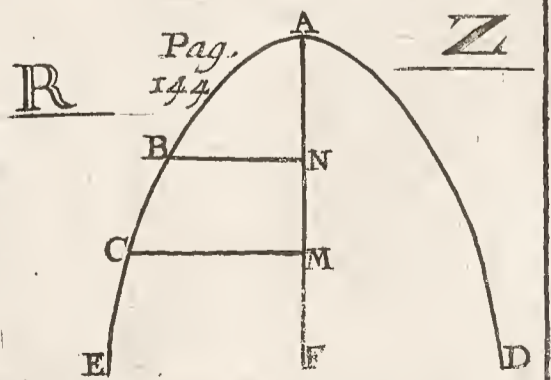
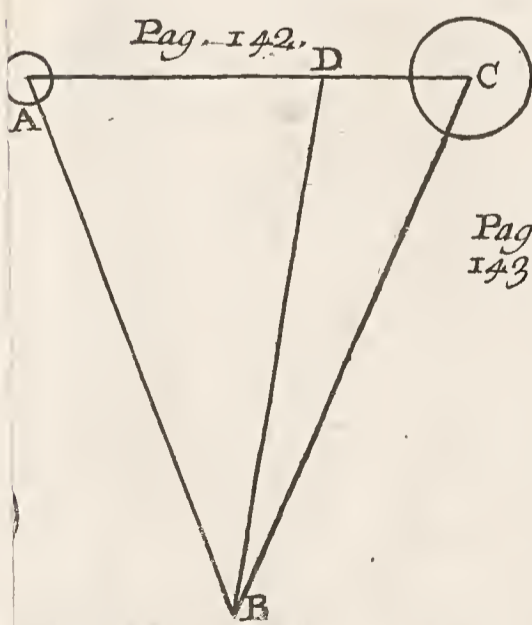
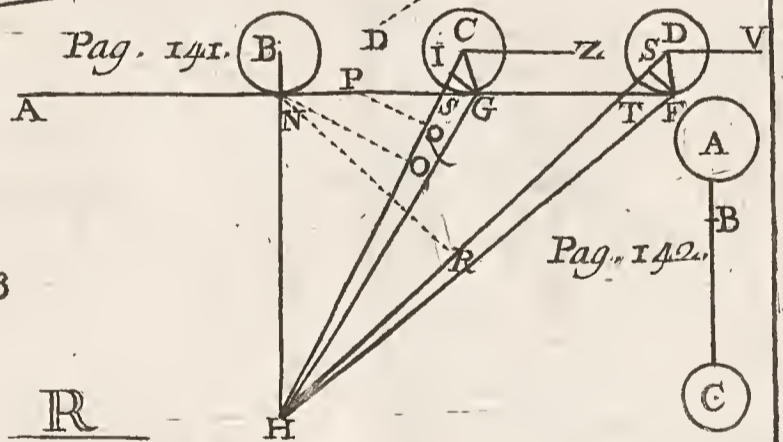
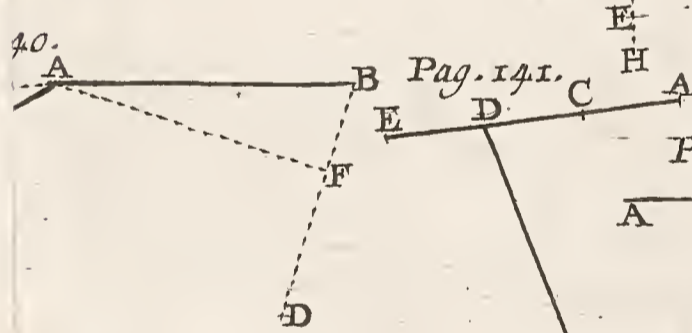
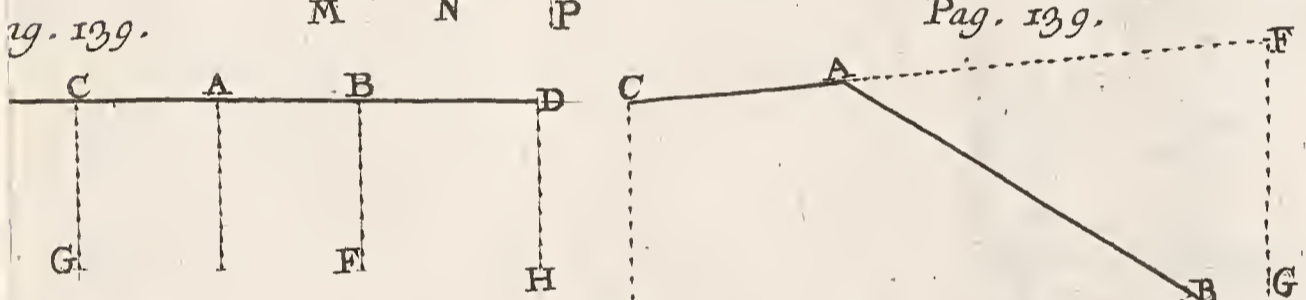
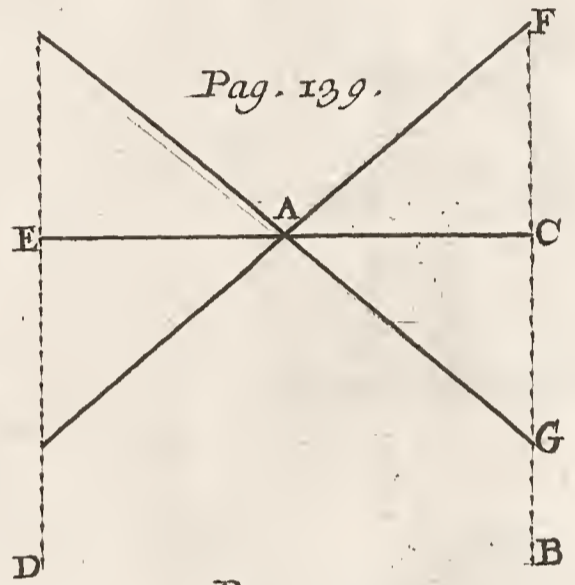
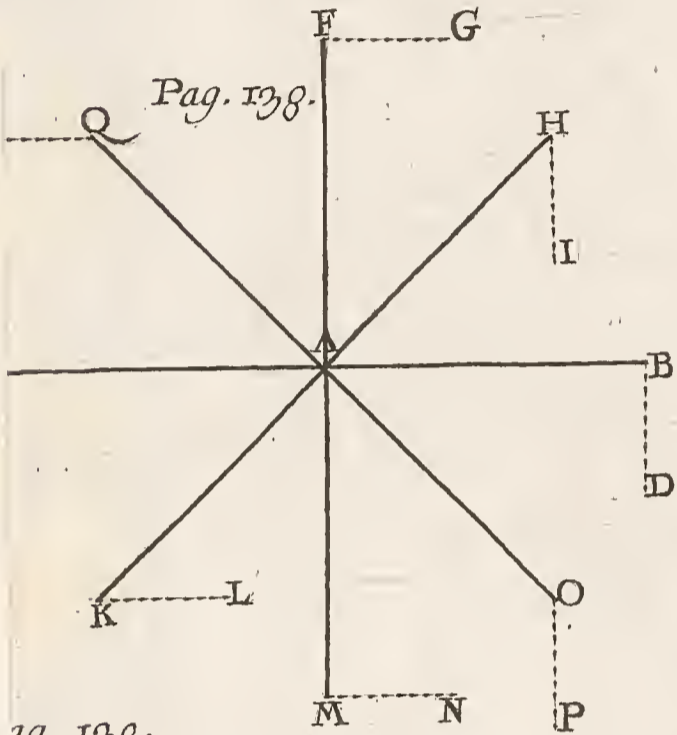
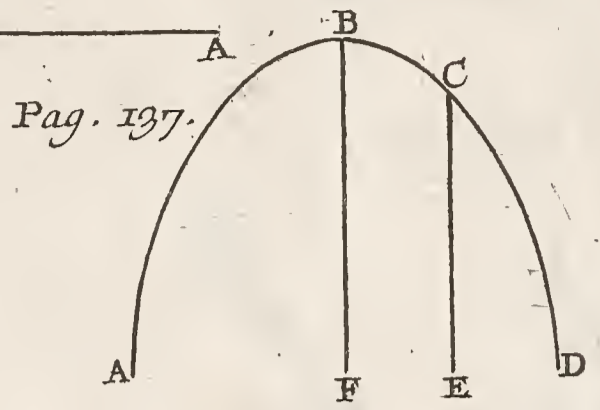
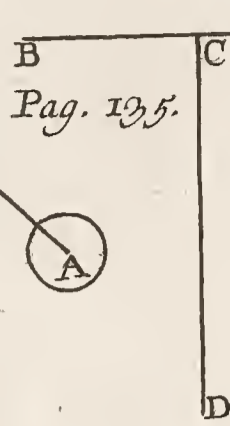
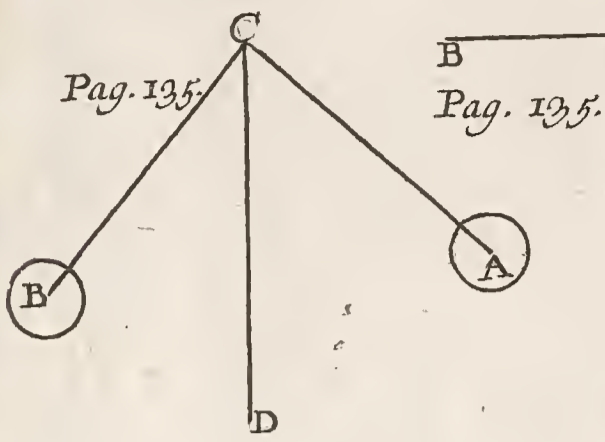




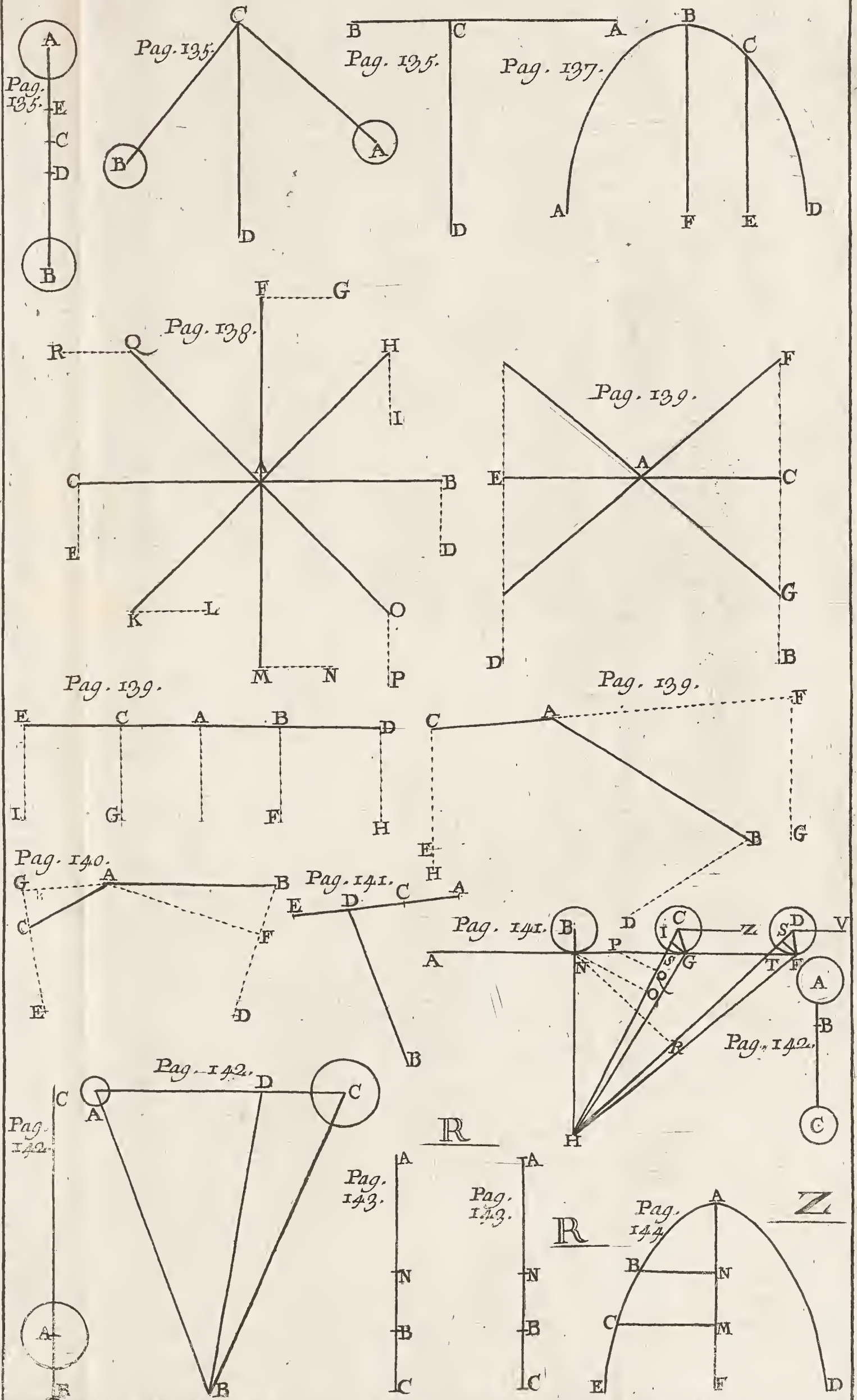
FIGURÆ À PAGINA 127. AD PAG. 134.

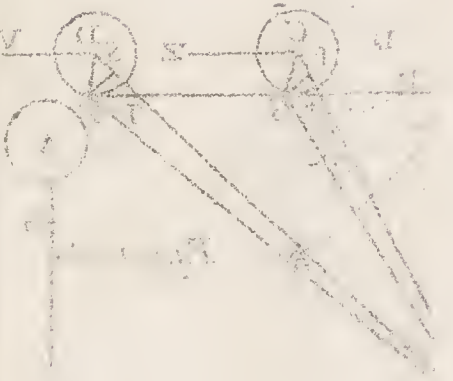
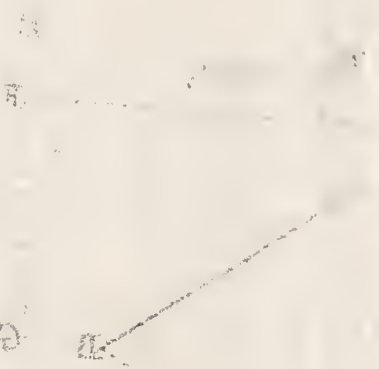
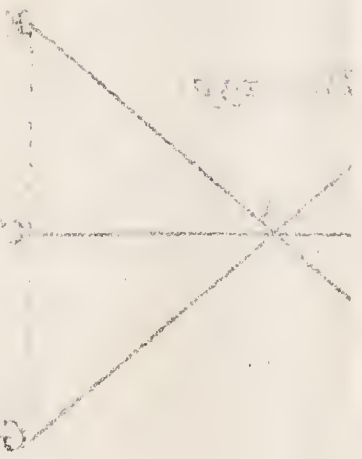


GVRAE A PAGINA 134. AD PAG. 144.

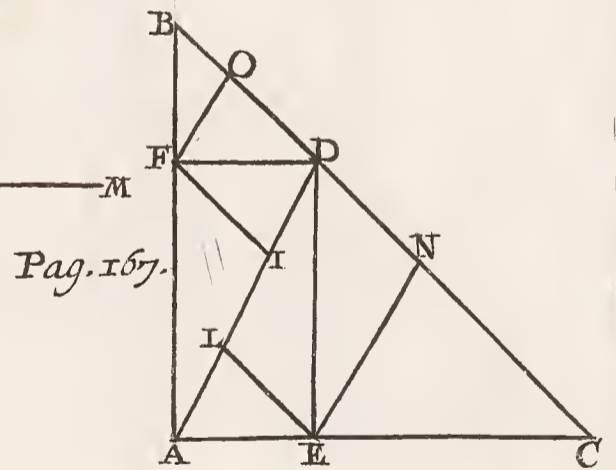
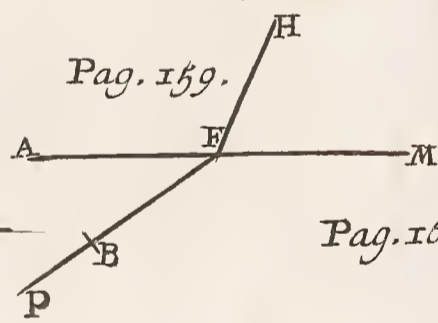
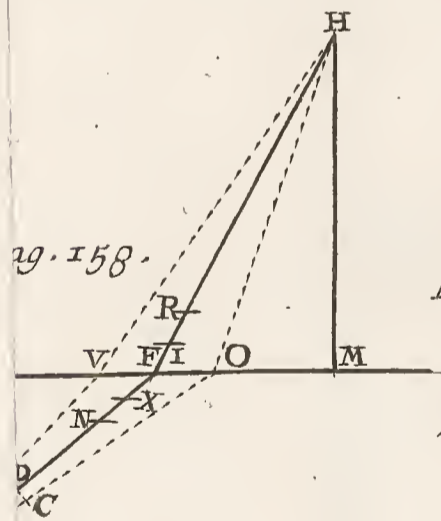
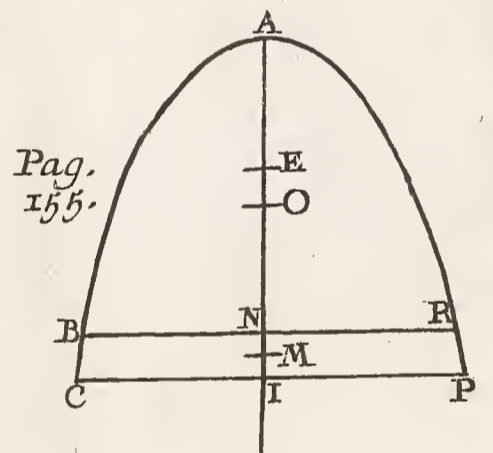
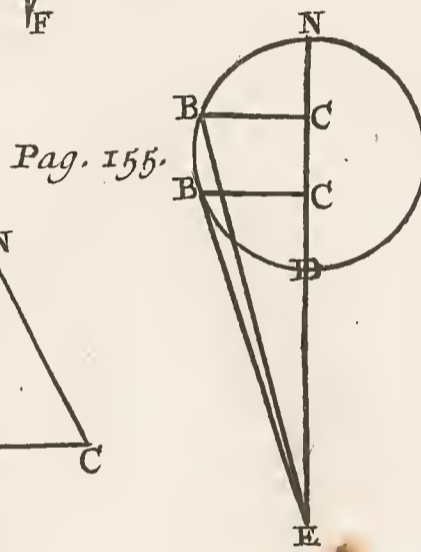
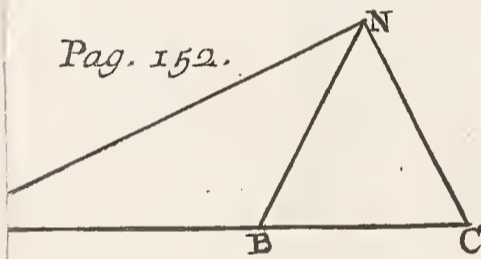
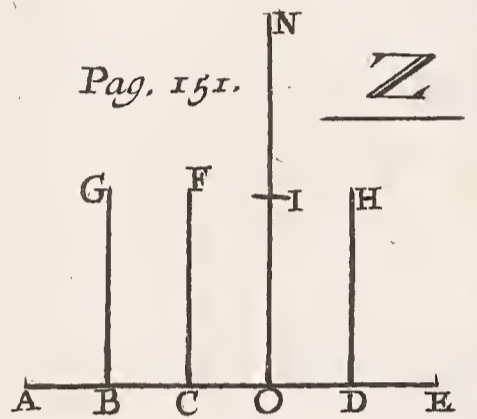
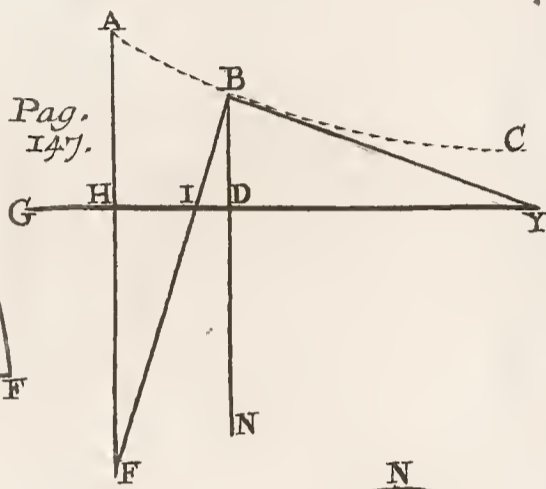
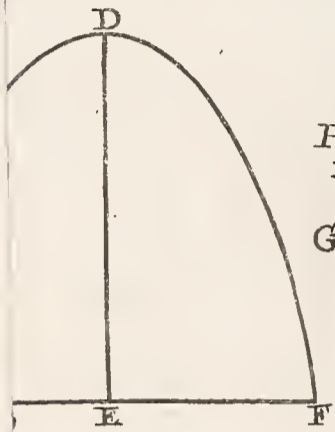
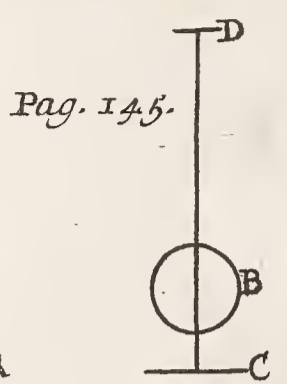
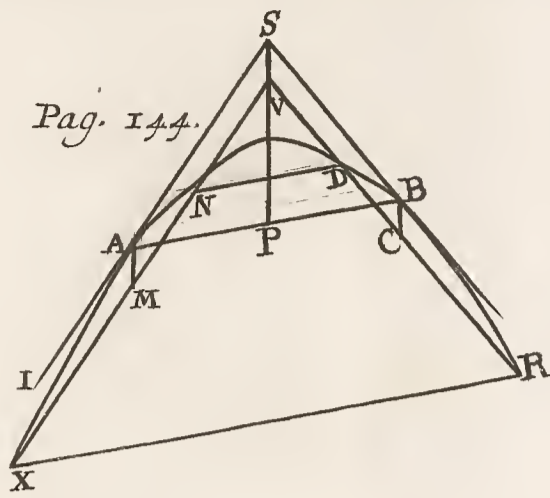
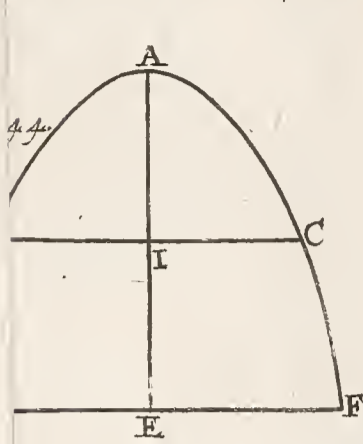


FIGURÆ À PAGINA 134. AD PAG. 144.

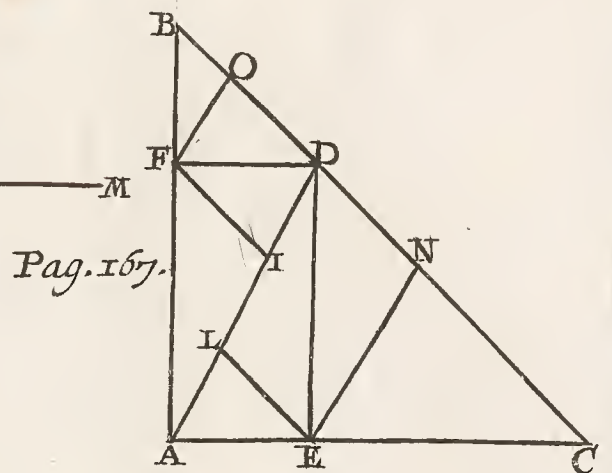
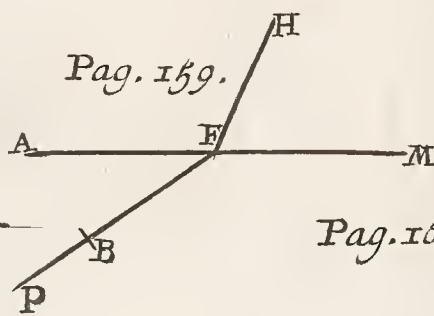
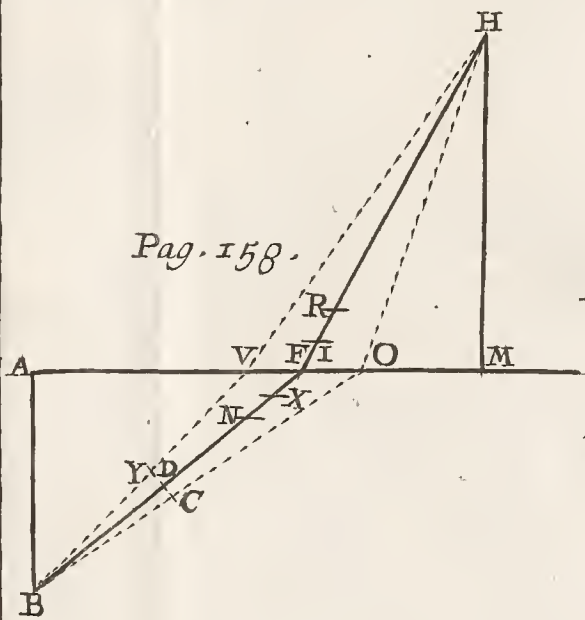
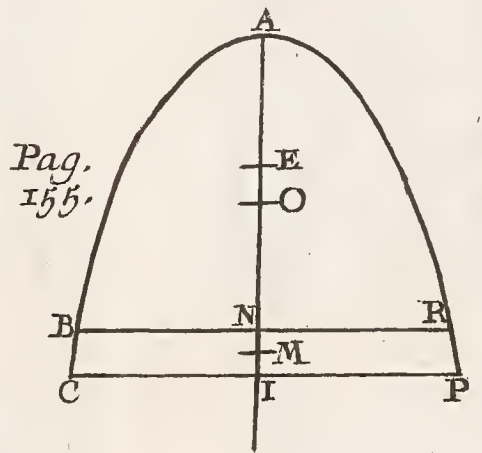
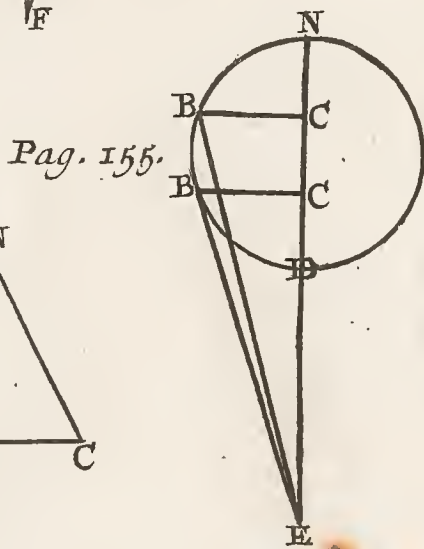
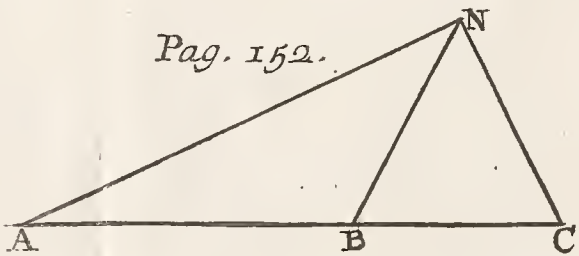
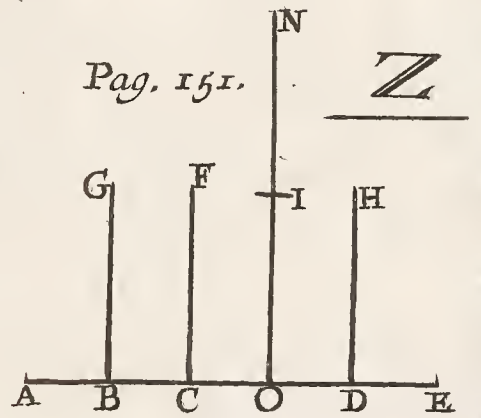
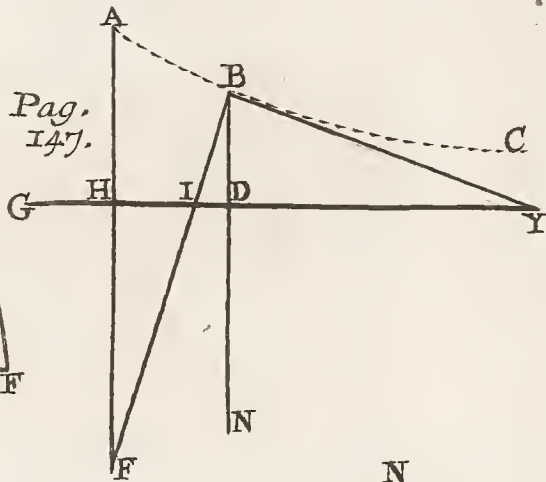
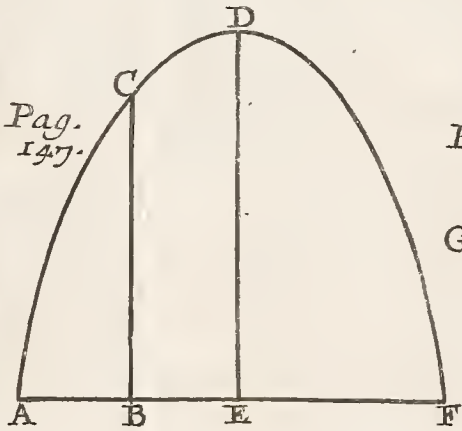
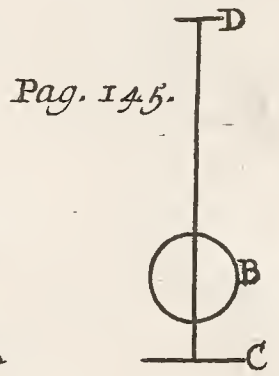
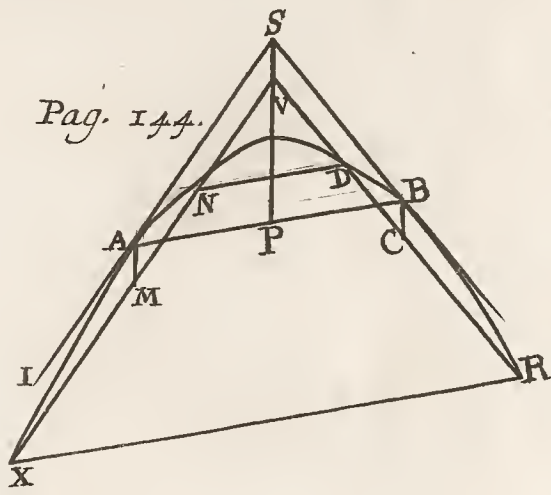
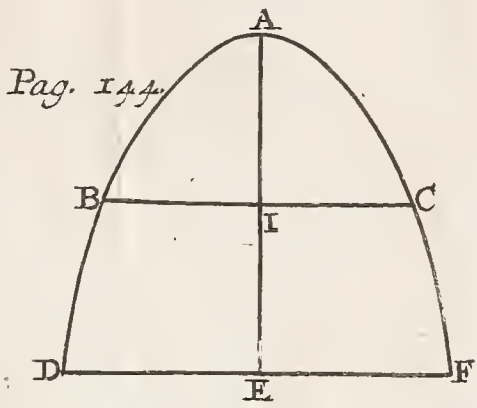




GVRÆ À PAGINA 144. AD PAG. 167.



FIGVRÆ À PAGINA 144. AD PAG. 167.



1890

1891

1892





fQA Fermat, Pierre de,
33 1601-1665.
F33X Varia opera mathe-
RB matica ... Tolosæ,
MHT 1679.



A 10/11/79

complete
pp. 1-100
2/12

34689

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 00270587 9

nmahr QA33.F33X
Varia opera mathematica

